К И Ї В С Ь К И Й
Н А Ц І О Н А Л Ь Н И Й У Н І В Е Р С И Т Е Т
І М Е Н І Т А Р А С А Ш Е В Ч Е Н К А

О.В.ІЛЬЧЕНКО

ПОСІБНИК З КУРСУ

“МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ”

для студентів ННІ «Інститут геології»

Рецензент:

канд. фіз.-мат. наук, доцент М.О. Денисьєвський

Рекомендовано вченою радою механіко-математичного факультету

(протокол № 16 від 11 березня 2021 року)

Ільченко О.В.

Посібник з курсу “Математичний аналіз” для студентів ННІ «Інститут геології» - 2021. – 65с.

ЗМІСТ

ВСТУП

Математичні методи дослідження застосовуються у всіх розділах геології. Якщо раніше вони використовувалися головним чином як допоміжні обчислювальні методи для обробки емпіричних даних, то зараз все частіше використовуються для розв'язання фундаментальних теоретичних проблем геології.

Як приклад можна навести побудову теорії структур кристалів. Ця теорія виявилася виключно плідною і призвела до виникнення нових напрямків в математиці і фізики. Вона лягла в основу деяких точних наук – геометричної кристалографії, рентгеноструктурного аналізу, фізики твердого тіла та інших. Іншим винаходом може служити теорія парагенезисів мінералів. Для геологів ці відкриття – демонстрація успішної математизації цілих областей науки.

Отже, на сучасному етапі одна з основних задач в області застосування математичних методів в геології – використання досягнень математики для розв'язання загальних та фундаментальних теоретичних та методичних питань, для побудови геологічних теорій.

Теорія ймовірностей та математична статистика на сьогодні становить загальний метод дослідження і обробки вибіркових даних в геологічних науках. Методи обчислення складають основу багатьох аналітичних підходів при побудові математичних моделей в геологічних науках. Неможливо уявити сучасну геофізику без застосування таких математичних розділів як теорія рівнянь з частинними похідними або функціональний аналіз.

Всі згадані математичні напрямки є прикладними. Вони потребують побудови теорії границь, диференціального та інтегрального числення. Саме математичний аналіз і займається математичним дослідженням зазначених теорій. Отже, без опанування математичного аналізу неможливий подальший прогрес у вивченні математичних дисциплін, які безпосередньо застосовуються при побудові математичних моделей геології.

У цьому посібнику представлений у повному обсязі згідно затвердженої програми курс математичного аналізу. З доведенням подаються тільки окремі твердження для демонстрації застосування методів. Наявні приклади доповнюють теорію важливими конкретними ілюстраціями теорії. Основна увага зосереджена на чіткому розумінні студентами суті необхідних математичних понять, методів і формул та вміння їх належно застосовувати під час розв'язування завдань різного типу складності на практичних заняттях.

Посібник з курсу "Математичний аналіз" для студентів ННІ «Інститут геології» рекомендований студентам – геологам в якості необхідного початкового етапу вивчення математичних методів в геології. При написанні посібника автор застосував методичну концепцію підручника «Вища математика: Кн. 1. Основні розділи» за ред. Кулініча Г.Л., К.: Либідь, 2003, який добре себе зарекомендував за багато років використання на різних факультетах і в інститутах (біологічного, геологічного, географічного, соціології, психології, міжнародних відносин) Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

I. ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ Й РЯДИ

1.1 ЗБІЖНІ ПОСЛІДОВНОСТІ. НЕСКІНЧЕННО МАЛІ Й НЕСКІНЧЕННО ВЕЛИКІ

Поняття *границі функції* – одне з найважливіших у вищій математиці.

Означення 1.1. Нехай кожному натуральному числу $n \in N$ поставлено у відповідність деяке дійсне число x_n. *Тоді кажуть, що задано послідовність чисел* $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$, *або коротко – послідовність* $\{x_n\}$.

Отже, **послідовністю** називають функцію $f(n) = x_n, n \in N$, визначену на множині натуральних чисел. Числа $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ **є членами (елементами) послідовності**, x_n – загальним **її членом (елементом)**, а n – **номером члена**.

Означення 1.2. *Послідовність* $\{x_n\}$ *називають* ***збіжною****, якщо для будь-якого числа* $\varepsilon > 0$ *можна знайти такий номер* $N = N(\varepsilon)$, *що при всіх* $n > N$ *виконується нерівність*

$$|x_n - a| < \varepsilon. \tag{1.1}$$

Число a *при цьому зветься границею послідовності* $\{x_n\}$.

Збіжність послідовності $\{x_n\}$ до числа a позначається так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ або } x_n \to a, n \to \infty.$$

Довільний інтервал вигляду $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, де $\varepsilon > 0$, називається ε-*околом точки* a. Якщо число a – границя послідовності $\{x_n\}$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна знайти такий номер $N = N(\varepsilon)$, що при $n > N$ усі члени послідовності потрапляють в ε-окіл точки a, адже при вказаних n згідно з формулою (1.1) виконуються нерівності

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Якщо послідовність $\{x_n\}$ не збігається, то кажуть, що вона є *розбіжною*.

Теорема 1.1. Збіжна послідовність має тільки одну границю.

Д о в е д е н н я

Припустимо протилежне: нехай збіжна послідовність $\{x_n\}$ має принаймні дві різні границі a і b. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна знайти такі номери N_1 і N_2, що по-перше, $|x_n - a| < \varepsilon$ при всіх $n > N_1$ і, по-друге, $|x_n - b| < \varepsilon$ при всіх $n > N_2$.

Покладемо $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2}$. Тоді при всіх $n > \max\{N_1, N_2\}$ одночасно виконуються нерівності

$$|x_n - a| < \frac{|a-b|}{2} \quad і \quad |x_n - b| < \frac{|a-b|}{2},$$

звідки випливає, що

$$|a-b| = |(x_n - b) + (a - x_n)| \le |x_n - b| + |x_n - a| < \frac{|a-b|}{2} + \frac{|a-b|}{2} =$$
$$= |a-b|,$$

тобто $|a-b| < |a-b|$.

Ця суперечність доводить теорему.

Серед збіжних послідовностей виділимо один важливий клас.

Означення 1.3. *Збіжну до нуля послідовність $\{x_n\}$ називають **нескінченно малою**.*

Сформулюємо без доведення деякі твердження про нескінченно малі послідовності.

Теорема 1.2 Для того щоб послідовність $\{x_n\}$ збігалася до числа a, необхідно й достатньо, щоб послідовність $\{a_n\} = \{x_n - a\}$ була нескінченно малою.

Лема 1.1. Сума двох нескінченно малих є нескінченно малою.

Наслідок. *Алгебраїчна сума будь-якого скінченного числа нескінченно малих є нескінченно малою.*

Лема 1.2 Добуток двох (або будь-якого скінченного числа) нескінченно малих є нескінченно малою.

Означення 1.4. *Послідовність $\{x_n\}$ називають **обмеженою**, якщо існує таке число $K > 0$, що при всіх $n \in N$ виконується нерівність $|x_n| \le K$. У протилежному випадку послідовність називають **необмеженою**.*

Лема 1.3 Добуток нескінченно малої на обмежену – нескінченно мала.

Доведення леми випливає з означення.

Означення 1.5. *Послідовність $\{x_n\}$ називають **нескінченно великою**, якщо для будь-якого числа $E > 0$ можна знайти такий номер N, що при всіх $n > N$ виконуватиметься нерівність $|x_n| > E$.*

Позначення: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ або $x_n \to \infty$, $n \to \infty$.

Якщо ж, починаючи з деякого номера N, члени нескінченно великої послідовності $\{x_n\}$ набувають тільки додатних (від'ємних) значень, то писатимемо $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ $\left(\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty\right)$ або $x_n \to +\infty, n \to \infty (x_n \to -\infty, n \to \infty)$.

Визначимо важливий зв'язок між нескінченно малими та нескінченно великими.

Теорема 1.3 Для того щоб $\{a_n\}$ $(a_n \neq 0)$ була нескінченно малою, необхідно й достатньо, щоб $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ була нескінченно великою.

Доведення

Необхідність. Нехай $\{a_n\}$ – нескінченно мала. Візьмемо будь-яке $\varepsilon > 0$ і знайдемо такий номер N, щоб при всіх $n > N$ виконувалася нерівність $|a_n| < \varepsilon$. Покладемо $\frac{1}{\varepsilon} = E$. Тоді при вказаних вище n виконується нерівність $\left|\frac{1}{a_n}\right| = \frac{1}{|a_n|} > \frac{1}{\varepsilon} = E$, звідки й випливає, що $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ – нескінченно велика.

Достатність. Нехай $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ – нескінченно велика. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий номер N, що при всіх $n > N$ виконується нерівність $\left|\frac{1}{a_n}\right| > \frac{1}{\varepsilon}$. Тоді для послідовності $\{a_n\}$ при вказаних вище n маємо $|a_n| < \varepsilon$, тобто $a_n \to 0, n \to \infty$, і $\{a_n\}$ – нескінченно мала.

1.2 ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ЗБІЖНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Теорема 1.4. Збіжна послідовність є обмеженою...

Доведення

Нехай $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Поклавши $\varepsilon = 1$, знайдемо такий номер N, що при всіх $n > N$ виконуватиметься нерівність $|x_n - a| < 1$. Звідси при вказаних n

$$|x_n| = |(x_n - a) + a| \leq |x_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

Покладемо $K = max\{1 + |a|, |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|\}$. Тоді очевидно, що $|x_n| < K$ при всіх $n \in N$, тобто збіжна послідовність $\{x_n\}$ дійсно є обмеженою.

На практиці при визначенні границь числових послідовностей часто використовують таку теорему про арифметичні дії над границями доведення якої можна знайти у підручниках списку літератури.

Теорема 1.5. Нехай послідовність $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ збіжні, при цьому $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$. Тоді збіжність є і послідовністю $\{x_n \pm y_n\}$, $\{x_n y_n\}$, $\{cx_n\}$ (c – стала),$\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ (остання при $y_n \neq 0, n \in \boldsymbol{N}, b \neq 0$), причому:

① $\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$;

② $\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = ab$;

③ $\lim_{n\to\infty} (cx_n) = ca$;

④ $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$.

Теорема 1.6 (про три послідовності). Нехай задано послідовності $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, при цьому для всіх $n \in N$ виконуються нерівності $x_n \leq y_n \leq z_n$. Тоді, якщо послідовності $\{x_n\}$, $\{z_n\}$ збіжні до однієї і тієї самої границі, то й послідовність $\{y_n\}$ також є збіжною, причому

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n.$$

Теорема 1.7 (про перехід до границі в нерівностях). Нехай задано збіжні послідовності $\{x_n\}$, $\{y_n\}$; при цьому для всіх $n \in N$ виконується нерівність $x_n \leq y_n$. Тоді й

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Приклад 1.1. *Довести, що* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1,\ a > 0$.

Нехай спочатку $a > 1$. Згідно з теоремою 1.2 достатньо переконатися в тому, що послідовність $\{a_n\} = \{\sqrt[n]{a} - 1\}$ – нескінченно мала. Маємо $\sqrt[n]{a} = 1 + a_n$ або $a = (1 + a_n)^n$. Ясно, що $a_n > 0$ при $n \in N$.

За нерівністю Бернуллі

$$(1 + a_n)^n > 1 + na_n,$$

а тому $a > 1 + na_n$ або $0 < a_n < \frac{a-1}{n}$.

За теоремою 1.6 про три послідовності, враховуючи, що ліворуч і праворуч в останніх нерівностях стоять нескінченно малі, дістаємо $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ і остаточно при $a > 1$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Якщо ж $0 < a < 1$, то $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}$, і оскільки $\frac{1}{a} > 1$, враховуючи теорему 1.5, маємо за попереднім також

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}=1.$$

1.3 МОНОТОННІ ПОСЛІДОВНОСТІ. ЧИСЛО e

Означення 1.6. *Послідовності* $\{x_n\}$ *називаються* ***зростаючою (спадною)****, якщо для будь-якого* $n \epsilon$ **N**

$$x_{n+1} > x_n \;\; (x_{n+1} < x_n).$$

Означення 1.7. *Послідовність* $\{x_n\}$ *називають* ***неспадною (незростаючою)****, якщо для будь-якого* $n \epsilon$ **N**

$$x_{n+1} \geq x_n \;\; (x_{n+1} \leq m).$$

Неспадні й незростаючі послідовності звуться ***монотонним****, а зростаючі й спадні –* ***строго монотонними****.*

Означення 1.8. *Послідовність* $\{x_n\}$ *називаються* ***обмеженою зверху (знизу)****, якщо існує таке число* M (m)*, що для будь-якого* $n \epsilon$ **N** *виконується нерівність*

$$x_n \leq M \;\; (x_n \geq m).$$

Наступна важлива теорема подається без доведення.

Теорема 1.8 (Вайєрштрасса). Обмежена зверху (знизу) неспадна (незростаюча) послідовність є збіжною.

Наслідок. *Монотонна послідовність* $\{x_n\}$ *збігається тоді й лише тоді, коли вона є обмеженою.*

Достатність умов безпосередньо випливає з теореми Вейєрштрасса, а необхідність – із теореми 1.4.

Приклад 1.2. *Довести, що*

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{якщо } |q|<1, \\ 1, & \text{якщо } q=1, \\ \text{не існує}, & \text{якщо } q=-1, \\ +\infty, & \text{якщо } q>1, \\ \text{не існує}, & \text{якщо } q<-1. \end{cases}$$

Дослідимо послідовність $\{q^n\}$ при $q>0$ (випадок $q>0$ пропонуємо розглянути самостійно).

Якщо $0 < q < 1$, то при будь-якому $n \epsilon \boldsymbol{N}$ ця послідовність задовольняє умови $q^{n+1} < q^n$, тобто є спадною. Крім того, вона обмежена знизу, оскільки $q^n > 0$ при будь-яких $n \epsilon \boldsymbol{N}$. Отже, послідовність задовольняє умови теореми Вейєрштраса й має границю $\lim_{n\to\infty} q^n = a$. Але

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty}(qq^{n-1}) = q \lim_{n\to\infty} q^{n-1} = qa.$$

З того, що $a = qa$, випливає, що $a(1-q) = 0$. Оскільки $1 - q \neq 0$, то $a = 0$. А це й означає, що

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0, \text{якщо } 0 < q < 1.$$

Випадок $q = 1$ очевидний.

Для $q > 1$ маємо

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{q}\right)^n} = +\infty.$$

Розглянемо дуже важливу послідовність $\{x_n\}$ із загальним членом

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n \in N$$

і переконаємося в її збіжності. Для цього введемо допоміжну послідовність $\{y_n\}$ із загальним членом

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, n \in N.$$

Оскільки $y_n > 1$ при будь-якому $n \in N$, то послідовність $\{y_n\}$ обмежується знизу. З іншого боку

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n^2 + 2n}\right)^{n+1}} \frac{n+2}{n+1}.$$

За нерівністю Бернуллі

$$\left(1 + \frac{1}{n^2 + 2n}\right)^{n+1} > 1 + \frac{n+1}{n^2 + 2n},$$

а тому

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} < \frac{1}{1+\dfrac{n+1}{n^2+2n}}\frac{n+2}{n+1} = \frac{n^3+4n^2+4n}{n^3+4n^2+4n+1} < 1,$$

тобто $y_{n+1} < y_n$ при будь-яких $n \in \boldsymbol{N}$ і послідовність $\{y_n\}$ спадна.

Таким чином, за теоремою Вейерштрасса допоміжна послідовність $\{y_n\}$ збігається до деякого числа, яке Л. Ейлер позначив літерою $\boldsymbol{e}$.

Далі маємо

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}}{1+\dfrac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} = e.$$

Отже, остаточно

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e}.$$

1.4 КРИТЕРІЙ КОШІ

Означення 1.2 збіжності послідовності $\{x_n\}$ тісно пов’язане з границею a цієї послідовності, що, як правило невідома. При цьому відповісти на питання про збіжність неможливо, не знаючи границі послідовності.

Проте є ознака збіжності послідовності, яка спирається не на знання границі послідовності, а лише на властивості її членів. Ця ознака називається ***критерієм Коші.***

Означення 1.9. *Послідовність $\{x_n\}$ називають **фундаментальною,** якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ можна знайти номер N, що при всіх $n > N$, $m > N$ виконуватиметься нерівність*

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Не обмежуючи загальності, вважатимемо, що $m > n$. Тоді $m = n + p$, де $p -$ ціле додатне число. А тому означення 1.9 можна подати в дещо зміненій формі.

Означення 1.10. *Послідовність $\{x_n\}$ називають **фундаментальною**, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ можна знайти номер N, що при всіх $n > N$ і будь-якому $p \in \boldsymbol{N}$ виконуватиметься нерівність*

$$\left|x_{n+p} - x_n\right| < \varepsilon.$$

Теорема 1.9 Якщо послідовність $\{x_n\}$ фундаментально, тоді вона є обмеженою.

Д о в е д е н н я

Поклавши в означенні 1.9 $\varepsilon = 1$, знайдемо такий номер N, що при всіх $n > N$, $m > N$ виконуватиметься нерівність

$$|x_n - x_m| < 1.$$

Візьмемо $m = N + 1$. Тоді з останньої нерівності випливає, що при всіх $n > N$ виконується нерівність

$$|x_n - x_{N+1}| < \varepsilon.$$

Отже, при вказаних n

$$|x_n| = |(x_n - x_{N+1}) + x_{N+1}| \le |x_n - x_{N+1}| + |x_{N+1}| \le 1 + +|x_{N+1}|.$$

Нехай

$$K = max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|, 1 + |x_{N+1}|\}.$$

Тоді, очевидно, що $|x_n| < K$ при всіх $n \epsilon \boldsymbol{N}$, тобто фундаментальна послідовність $\{x_n\}$ дійсно є обмеженою.

Теорема 1.10. Якщо послідовність $\{x_n\}$ збіжна, то вона фундаментальна.

Д о в е д е н н я

Нехай послідовність $\{x_n\}$ збігається, при чому $x_n \to a,\ n \to \infty$. Тоді для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ можна знайти такий номер N, що при всіх $n > N$ виконуватиметься нерівність

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тоді при всіх $n > N, m > N$

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) + (a - x_m)| \le |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

що й доводить фундаментальність послідовності $\{x_n\}$

Доведення наступної теореми можна знайти у підручниках з математичного аналізу, які наведені у списку літератури.

Теорема 1.11 (критерій Коші). Для того щоб послідовність $\{x_n\}$ збігалася, необхідно й достатньо, щоб вона була фундаментальною.

Приклад 1.3. *Довести, що послідовність*

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}, \qquad n \in N$$

розбігається.

Згідно за критерієм Коші достатньо довести, що ця послідовність не є фундаментальною. Оцінимо різницю $\left|x_{n+p} - x_n\right|$:

$$\left|x_{n+p}-x_n\right| = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p} \geq \frac{1}{n+p}+\frac{1}{n+p}+\cdots+\frac{1}{n+p} = \\ = \frac{p}{n+p}$$

при будь-яких $n \in \boldsymbol{N},\ p \in \boldsymbol{N}$. Зокрема, при $p = n$

$$|x_{2n}-x_n| \geq \frac{1}{2}, \qquad n \in \boldsymbol{N}.$$

Отже, справджується твердження, протилежне фундаментальності послідовності $\{x_n\}$. Враховуючи, що послідовність $\{x_n\}$ є зростаючою маємо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

1.5 ЧИСЛОВІ РЯДИ

Поряд із числовими послідовностями в різних розділах вищої математики та її застосування широко використовується числові ряди, які є узагальненням суми чисел

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

на випадок нескінченого числа доданків.

Отже, нехай $\{a_n\}$ – довільна числова послідовність. Вираз $a_1 + a_2 + \cdots +$ $+a_n + \cdots$, що позначається як

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

називають числовим рядом.

Числа $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ звуться членами ряду, a_n – його ***n*- м (загальним) членом.**

Суму S_n перших n членів ряду називають його частковою сумою:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n\ .$$

Аби підкреслити номер S_n, її часто називають ***n-ю частковою сумою***

Отже, з кожним рядом можна пов'язати послідовність $\{S_n\}$ його часткових сум.

Означення 1.11. *Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називають **збіжним**, якщо послідовність $\{S_n\}$ його часткових сум збігаються . Границю S послідовності часткових сум називають **сумою ряду**. Це записується так:*

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, .$$

Якщо ж послідовність $\{S_n\}$ *розбіжна, то й ряд називають* ***розбіжним.***

Приклад 1.4. *Дослідити, при яких* q *збігається ряд* $1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots$ Такий ряд називатиметься нескінченною геометричною прогресією і, як відомо зі шкільного курсу, якщо $q \neq 1$, то

$$S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^n}{1 - q},$$

а тому, при $|q| < 1$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1 - q} \; ;$$

так що при таких q ряд збігається і його сума дорівнює $\frac{1}{1-q}$.

Якщо $|q| > 1$, то $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, тобто ряд збігається. При $q = 1$ряд набуває вигляду $1 + 1 + \cdots + 1$ ... У цьому разі $S_n = \; n$ і $\mathit{lim}_{n\to\infty} S_n$, тобто ряд розбігається. При $q = -1$ ряд набуває вигляду $1 - 1 + \cdots + +(-1)^{n+1} + \cdots$ При цьому

$$\mathrm{S_n} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n \text{ парне}, \\ 1, & \text{якщо } n \text{ непарне}. \end{cases}$$

Отже, границя послідовності $\{\mathrm{S_n}\}$ не існує і ряд розбігається. Остаточно ряд збігається лише у випадку $|q| < 1$, і його сума дорівнює $\frac{1}{1-q}$.

Установлений у п. 1.4 критерій Коші збіжності послідовності дає змогу сформулювати необхідні та достатні умови збіжності ряду.

Теорема 1.12 (критерій Коші). Аби ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігався, необхідно й достатньо, щоб для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існував такий номер N, щоб при всіх $n > N$ і будь-якому $p \, \epsilon \, N$ виконувалася нерівність $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$.

Для доведення достатньо скористатися послідовності часткових сум $\{\mathrm{S_n}\}$ теоремою 1.11 і означенням 1.9, зазначивши, що

$$S_{n+p} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k .$$

Наслідок 1. *Збіжність або розбіжність ряду не зміниться, якщо в ньому замінити скінчене число членів.*

Для доведення достатньо, очевидно, вважати в критерії Коші номер N більшим від найбільшого з номерів змінених членів ряду.

Наслідок 2. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то його n-й член прямує до нуля при $n \to \infty$, тобто $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Для доведення достатньо покласти в критерій Коші $p = 1$.

Дістанемо, що при всіх $n > N$ справджується нерівність $|a_{n+1}| < \varepsilon$. Отже, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Зазначимо, що умова $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ лише необхідна, але не достатня умова збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Дійсно, розглянемо так званий гармонічний ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Для цього ряду $a_n = \frac{1}{n}$ і $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Проте, як показано наприкінці п. 1.4, послідовність часткових сум $S_n \to +\infty,\ n \to \infty$, тобто гармонічний ряд розбігається.

II. ГРАНИЦЯ Й НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

2.1 ОЗНАЧЕННЯ ГРАНИЦІ ФУНКЦІЇ

Нехай функцію $y = f(x)$ визначено на деякій підмножині X множини дійсних чисел $\boldsymbol{R}$ і x_0 – гранична точка множини X. Нагадаємо, що в будь-якому $\varepsilon -$ околі $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ граничної точки x_0 міститься нескінченна кількість точок множини X, проте сама точка x_0 може й не належати X.

Означення 2.1 (Гейне). *Число A називають **границею функції** $f(x)$ при $x \to x_0$ (або в точці x_0), якщо для довільної послідовності $\{x_n\} \subset X, x_n \neq x_0$ $(n \in \boldsymbol{N})$, збіжної до x_0, відповідна послідовність значень функції $\{f(x_n)\}$ є збіжною до A.*

Якщо число A – границя функції в точці x_0, то пишуть $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ або $f(x) \to A$ при $x \to x_0$.

Нехай функція $f(x)$ має границю, тоді вона, очевидно, єдина. Це випливає з того, що збіжна послідовність $\{f(x_n)\}$ може мати лише одну границю.

Означення 2.2 (Коші). *Число A називають **границею функції** $f(x)$ при $x \to x_0$ (або в точці x_0), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна знайти таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що при всіх $x \in X$, які задовольняють нерівність*

$$0 < |x - x_0| < \delta,$$

виконується нерівність

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Теорема 2.1. Означення границі функції в точці за Гейне й за Коші еквівалентні.

Д о в е д е н н я

Нехай число A є границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$ за Коші й $\{x_n\}$ – довільна послідовність, збіжна до x_0, $x_n \neq x_0$ $(n \in N)$. Тоді при будь-якому $\delta > 0$ знайдеться такий номер N, що при всіх $n > N$ справджуватиметься нерівність $0 < |x - x_0| < \delta$. Крім того, при будь-якому $\varepsilon > 0$ знайти таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $0 < |x - x_0| < \delta$, $x \in X$. Покладемо $\delta = \delta(\varepsilon)$ в нерівності $0 < |x - x_0| < \delta$; тоді при $n > N = N(\varepsilon)$ маємо $|f(x_n) - A| < \varepsilon$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Таким чином, число A є границею функції $x \to x_0$ за Гейне.

Навпаки, нехай число A є границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$ за Гейне. Припустимо, проте, що це число не є границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$ за Коші. Тобто є таке $\varepsilon > 0$, що при будь-якому $\delta > 0$ знайдеться така точка $x \in X$, для якої $0 < |x - x_0| < \delta$, але $|f(x) - A| \geq \varepsilon$.

Покладемо $\delta = \delta_n = \frac{1}{n}, n \in N$ і для кожного з указаних $\delta_n > 0$ знайдемо точку $x_n \in X$ таку, що $0 < |x_n - x_0| < \delta_n$, але $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon$. В силу вибору δ_n послідовність $\{x_n\}$, очевидно, є збіжною для x_0, але послідовність $\{f(x_n)\}$ – не збіжна до числа A. Це суперечить тому, що число A є границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$ за Гейне.

Еквівалентність обох значень повністю доведено.

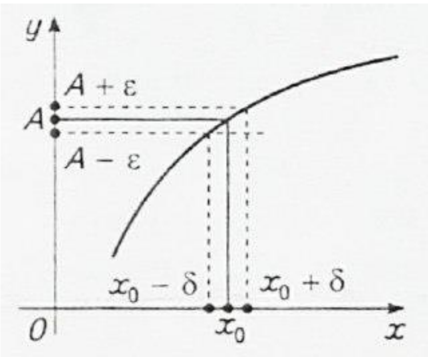


Рисунок 1

Відзначимо геометричний зміст означення 2, скориставшись графіком функції $y = f(x)$ (рис. 1). Хоч би який малий ε-окіл точки x_0, що коли x змінюється між $x_0 - \delta$ і $x_0 + \delta$, графік функції $y = f(x)$ розташовується в смузі завширшки 2ε між прямими $y = A - \varepsilon$ і $y = A + \varepsilon$. Наголосимо, що в точці x_0 функція $f(x)$ може набувати значення, яке не дорівнює A, або навіть бути невизначеною. Тому в означенні 2 йдеться саме про нерівність $0 < |x - x_0| < \delta$.

Необхідні й достатні умови існування границі функції подамо у вигляді теореми.

2.2 ОДНОСТОРОННІ ГРАНИЦІ

При дослідженні функції корисні поняття односторонніх границь.

Означення 2.3 (Гейне). *Число A називають* ***правою (лівою) границею функції*** *$f(x)$ у точці x_0, якщо для довільної послідовності $\{x_n\} \subset X, x_n > x_0$ $(x_n < x_0)(n \in N)$, збіжної до x_0, відповідна послідовність значень функції $\{ f(x_n)\}$ збіжна до A.*

Це позначають відповідно так:

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = A \left(\lim_{x \to x_0-0} f(x) = A \right)$$

або

$$f(x_0 + 0) = A \, (f(x_0 - 0) = A).$$

В окремому випадку, коли $x_0 = 0$, пишуть

$$\lim_{x \to +0} f(x) = A \left(\lim_{x \to -0} f(x) = A \right).$$

Означення 2.4 (Коші). *Число A називають* ***правою (лівою) границею функції*** *$f(x)$ у точці x_0, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що при всіх x, які задовольняють нерівність $0 < x - x_0 < \delta$ $(0 < x_0 - x < \delta)$, виконуватиметься нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.*

Означення 2.3 і 2.4, звичайно ж, еквівалентні.

Зв’язок між односторонніми границями та границею функції в точці встановлює наступна теорема.

Теорема 2.2. Функція $f(x)$ має границю в точці x_0 тоді й лише тоді, коли існують їх права й ліва границі в цій точці, які збігаються між собою; при цьому

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0).$$

Д о в е д е н н я

Якщо функція $f(x)$ має в точці x_0 границю, що дорівнює A, то згідно з означенням 2 це саме число A буде, очевидно, як правою, так і лівою границями функції $f(x)$ у точці x_0.

Навпаки, нехай

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = \lim_{x \to x_0-0} f(x) = A.$$

Згідно з означенням 4 для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдуться такі числа $\delta_1 > 0$ і $\delta_2 > 0$, що при всіх $x \in X$, які задовольняють нерівність $0 < x - x_0 < \delta_1$ або $0 < x_0 - x < \delta_2$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Поклавши $\delta = = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, дістанемо, що при всіх x, які задовольняють нерівність $0 < |x - x_0| < \delta$, справджується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. А це згідно з означенням 2 і показує, що $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. Теорему доведено повністю.

2.3 ВЛАСТИВОСТІ ГРАНИЦЬ

Розглянемо основні теореми про властивості границь функцій.

Теорема 2.3. Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ мають границі в точці x_0:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A, \lim_{x \to x_0} g(x) = B.$$

Тоді функції $f(x) \pm g(x), f(x) \cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)}$ (при $B \neq 0$) також мають границі в точці x_0, причому:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B$;
2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) g(x) = A \cdot B$;
3) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.

Д о в е д е н н я

Нехай $\{x_n\} \subset X, x_n = x_0$ $(n \in N)$ – довільна послідовність, збіжна до x_0. За означенням 1 збіжними є послідовності $\{ f(x_n)\}$, $\{ g(x_n)\}$, причому їхні границі – відповідно A і B. Але тоді за теоремою 5 послідовності $\{ f(x_n) \pm g(x_n)\}$, $\{ f(x_n) g(x_n)\}$, $\left\{\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\right\}$ (при $B \neq 0$) мають границі, що дорівнюють відповідно $A \pm \pm B,\ AB,\ \frac{A}{B}$.

Згідно з означенням 2.1

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B;\ \lim_{x \to x_0} f(x) g(x) = AB;\ \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

Наслідок 1. *Для довільного числа C*

$$\lim_{x \to x_0} [C\, f(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Наслідок 2. *Для довільного* $m \in \boldsymbol{N}$

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)]^m = \left[\lim_{x \to x_0} f(x)\right]^m.$$

Теорема 2.4. Нехай $f(x), g(x), h(x)$ – функції, визначені на множині X; при цьому при всіх $x \in X$ виконуються нерівності

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Тоді, якщо існують границі

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = A,$$

то існує границя функції $g(x)$ у точці x_0, причому

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = A.$$

Теорема 2.5. Нехай $f(x)$ і $g(x)$ – функції, визначені на множині X, при цьому при всіх $x \in X$ виконується нерівність $f(x) \leq g(x)$. Тоді, якщо існують границі

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A, \lim_{x \to x_0} g(x) = B,$$

то $A \leq B$.

Теорема 2.6. Нехай $y = f[\varphi(x)]$ – складна функція, де $y = f(u)$, а $u = \varphi(x)$; при цьому існують границі $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = A(\varphi(x) \neq A$ при $x \neq x_0)$ і $\lim\limits_{u \to A} f(u) = B$. Тоді в точці x_0 існує границя складної функції $f[\varphi(x)]$, причому

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = B.$$

Доведення

Нехай $\{x_n\} \subset X, x_n = x_0 \ (n \in N)$ – довільна послідовність, збіжна до x_0. Тоді згідно з означенням 1 послідовність $\{u_n\} = \{\varphi(x_n)\}$ – збіжна до числа A й така, що $u_n \neq A(n \in \boldsymbol{N})$. Але тоді, на підставі існування $\lim\limits_{u \to A} f(u) = B$ і знову посилаючися на означення 1, маємо, що послідовність $\{f(u_n)\} = \{f(\varphi(x_n))\}$ збіжна до числа B. Згідно з означенням 1

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{u \to A} f(u) = B,$$

що й треба довести.

Ця теорема дає змогу ефективно обчислювати границі, переходячи від змінної x до нової змінної $u = \varphi(x)$.

2.4 ПЕРША Й ДРУГА ВАЖЛИВІ ГРАНИЦІ

Здебільшого границі функцій можна обчислювати за допомогою так званих важливих границь.

Перша важлива границя

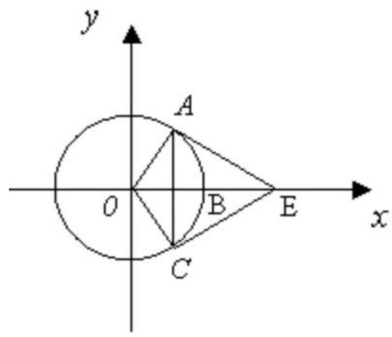
Доведемо, що

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.}$$

Зазначимо спочатку, що функція $\frac{\sin x}{x}$ визначена при всіх $x \neq 0$. Припустимо, що $x \epsilon (0;\frac{\pi}{2})$. Доведемо, що при таких x виконуються нерівності $\sin x < x < \operatorname{tg} x$.

Розглянемо коло одиночного радіуса з центром у точці O (рис. 5.2) і побудуємо рівні між собою кути AOB і BOC із радіанною мірою x. Нехай EA і EC – дотичні до цього кола. Очевидно, що хорда AC, яка стягує дугу кола AC, менша від цієї дуги, котра, своєю чергою, менша за довжину ламаної $EA + EC$. Але ж $AC = 2\sin x$, $EA + EC = 2\operatorname{tg} x$, а довжина дуги $AC - 2x$, тобто $\sin x < x < \operatorname{tg} x$.

Беручи до уваги, що при $x \epsilon (0;\frac{\pi}{2})$ $\sin x > 0$ і $\operatorname{tg} x$, маємо $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ або $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$, звідки $0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x$.
Оскільки $1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < \frac{x^2}{2}$ (тут використано, що $\sin\frac{x}{2} < \frac{x}{2}$), то при $x \epsilon (0;\frac{\pi}{2})$



$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{2}.$$

Зазначимо, що обидві частини цієї нерівності не змінюються, якщо замінити x на $-x$. Тому вона виконується не лише при $x \epsilon (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$, $x \neq 0$.

За теоремою 2.5 можна зробити висновок, що

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) = 0,$$

тобто

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Друга важлива границя

Доведемо, що

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.}$$

Нагадаємо (див. п. 1.3), що

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n = e.$$

Розглянемо спочатку випадок, коли $x \to +\infty$. Позначимо через n цілу частину числа $x > 1$; тоді $n \le x < n+1$ і $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \le \frac{1}{n}$, а отже,

$$\left(1+\tfrac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\tfrac{1}{x}\right)^x < \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Зауважимо, що $n \to \infty$, якщо $x \to +\infty$, а тому

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \frac{e}{1} = e;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n\left(1+\tfrac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e.$$

За теоремою 2.4

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{x}\right)^x = e.$$

Розглянемо далі випадок, коли $x \to -\infty$. Вважаючи $x < -1$, введемо нову змінну $u = -(x+1)$. Маємо $x = -(u+1)$, і $u \to +\infty$ при $x \to -\infty$. Звідси за теоремою 2.6

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{u\to+\infty}\left(1-\frac{1}{u+1}\right)^{-u-1} = \lim_{u\to+\infty}\left(\frac{u}{u+1}\right)^{-u-1} =$$

$$= \lim_{u\to+\infty}\left(\frac{u+1}{u}\right)^{u+1} = \lim_{u\to+\infty}\left(1+\frac{1}{u+1}\right)^{u+1} =$$

$$= \lim_{u\to+\infty}\left(1+\tfrac{1}{u}\right)^u\left(1+\tfrac{1}{u}\right) = e\cdot 1 = e.$$

Поєднуючи обидва випадки, дістаємо остаточно

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Зауваження. Інша форма запису другої важливої границі має вигляд

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e.$$

Дійсно, замінимо змінну, поклавши $t = \frac{1}{x}$. Ясно, що $t \to 0$ при $x \to \infty$, звідки за теоремою 2.7

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to\infty}(1+t)^{1/t} = e.$$

2.5 НЕСКІНЧЕННО МАЛІ Й НЕСКІНЧЕННО ВЕЛИКІ ФУНКЦІЇ. ЇХ ПОРІВНЯННЯ

Означення 2.4. *Функцію $f(x)$ називають **нескінченно малою** при $x \to x_0$ (або в точці x_0, якщо*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

Нескінченно малу в точці функцію коротко часто називають просто *нескінченно малою.*

Означення 2.5. *Функцію $f(x)$називають **нескінченно великою** при $x \to x_0$ (або в точці x_0), якщо*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

Нескінченно велику в точці функцію коротко часто називають просто *нескінченно великою.*

Властивості нескінченно малих і нескінченно великих подамо у наступних теоремах.

Теорема 2.7. Аби функція $f(x)$ мала в точці x_0 границею число A, необхідно й достатньо, щоб в околі точки x_0виконувалося співвідношення

$$f(x) = A + \alpha(x),$$

де $\alpha(x)$ – нескінченно мала в точці x_0.

Теорема 2.8. Сума (різниця) й добуток нескінченно малих є нескінченно малими.

Теорема 2.9. Добуток нескінченно малої функції на обмежену функцію – нескінченно мала.

Теорема 2.10. Якщо $\alpha(x)$ – нескінченно мала в точці x_0 і $\alpha \neq 0$ в околі точки x_0, то функція $\frac{1}{\alpha(x)}$ нескінченно велика в цій точці.

Якщо $f(x)$ – нескінченно велика в точці x_0, то функція $\frac{1}{f(x)}$ нескінченно мала в цій точці.

Твердження теорем 2.8–2.10, як відомо, справджуються для будь-яких послідовностей (див. п. 1.1). Повторюючи процедуру доведення, аналогічну тій, яку викладено щодо теорем 2.4–2.6, легко довести справедливість усіх наведених вище теорем. Пропонуємо зробити це самостійно.

Зазначимо нарешті, що означення 2.8, 2.9 справедливі, звичайно ж, і для випадків $x \to x_0 \pm 0$, $x \to \pm\infty$, $x \to \infty$.

2.6 ПОНЯТТЯ НЕПЕРЕРВНОСТІ ФУНКЦІЇ. ТОЧКИ РОЗРИВУ

Нехай функцію $y = f(x)$ визначено на деякій підмножині X множини дійсних чисел $\boldsymbol{R}$ і x_0 – гранична точка множини X. Вважаємо, що x_0 обов'язково належить X.

Означення 2.6. *Функцію $f(x)$ називають **неперервною в точці** x_0, якщо*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

*Саму точку $x_0 \in X$ при цьому називають **точкою неперервності функції $f(x)$**.*

Оскільки $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$, то умову неперервності можна подати так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x),$$

тобто для неперервності функції знаки функції і границі можна переставляти місцями.

При дослідженні функцій на неперервність зручно користуватися й дещо іншою формою означення 2.6. Розглянемо значення функції $y = f(x)$ у точці x_0 і, надавши аргументу деякого приросту Δx, перейдемо до точки $x_0 + \Delta x \in X$. Функція $f(x)$ матиме при цьому приріст

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Означення 2.7. *Функцію $f(x)$ називають **неперервною в точці** x_0, якщо її приріст у цій точці – нескінченно мала функція при $\Delta x \to 0$, тобто $\lim\limits_{x \to x_0} \Delta y = 0$.*

Саме це означення найчастіше застосовується на практиці.

2.7 КЛАСИФІКАЦІЯ РОЗРИВІВ ФУНКЦІЇ

Розглянемо точки, в яких функція $y = f(x)$ не є неперервною.

Означення 2.8. *Точку $x_0 \in X$, яка не є точкою неперервності функції $f(x)$, називають **точкою розриву функції** $f(x)$.*

Означення 2.9. *Точку розриву x_0 функції $f(x)$ називають **точкою розриву першого роду,** якщо в ній існують односторонні границі. При цьому у випадку $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ кажуть про точку усувного розриву.*

Означення 2.10. *Точку розриву x_0 функції $f(x)$ називають **точкою розриву другого роду,** якщо в ній не існує принаймні одна з односторонніх границь (зокрема нескінченна).*

Так, для функції

$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

$x_0 = 0$ є точкою розриву другого роду, оскільки, очевидно, її права границя в ці точці не існує.

Взагалі, кажучи про неперервні функції на всій множині X, мають на увазі, що функція неперервна в кожній точці $x \epsilon X$.

2.8. ЗАГАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ

Розглянемо основні властивості неперервних функцій, які випливають з означення неперервності й відповідних властивостей границі функції.

Теорема 2.11. Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервності в точці x_0. Тоді функції $f(x) \pm g(x)$, $f(x)\, g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ (при $g(x_0) \neq 0$) також неперервні в цій точці.

Доведення одразу випливає з значення 2.6 і теореми 2.3.

Теорема 2.12. Нехай $y = f[\varphi(x)]$ — складна функція, де $y = f(u)$, а $u = \varphi(x)$; при цьому функція $\varphi(x)$ неперервна в точці x_0, а $f(u)$ - в точці $u_0 = \varphi(x_0)$. Тоді складна функція $y = f[\varphi(x)]$ неперервна в точці x_0.

Зауваження. Останнє співвідношення у випадку, якщо x_0 —гранична точка множини X, можна подати так:

$$\lim_{x \to x_0} f\,[\varphi(x)] = f\left[\lim_{x \to x_0} \varphi(x)\right].$$

Звідси випливає, що знак границі lim і знак функції f, якщо функція $f(x)$ неперервна, можна міняти місцями.

2.9 ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЙ, НЕПЕРЕРВНИХ НА ВІДРІЗКУ

Розглянемо кілька надзвичайно важливих властивостей функції, неперервної на деякому відрізку $[a, b]$. При цьому, як і завжди, розумітимемо, що функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, якщо вона неперервна в усіх точках інтервалу (a, b), а в самих точках a і b - відповідно справа й зліва.

Доведення наступних теорем можна знайти у підручниках з математичного аналізу, які наведені у списку літератури.

Теорема 2.13 (перша теорема Вейєрштрасса). Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$. Тоді вона є обмеженою на цьому відрізку.

Теорема 2.14 (друга теорема Вейєрштрасса). Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$. Тоді вона досягає своїх найбільшого й найменшого значень в деяких точках цього відрізка, тобто існують точки $x_1,\ x_2 \epsilon [a, b]$, для яких

$$\max_{x \epsilon [a,\ b]} f(x) = f(x_1)\,, \qquad \min_{x \epsilon\, [a,\ b]} f(x) = f(x_2).$$

Зауваження. На неперервні на інтервалі (a, b) функції $f(x)$ друга теорема Вейерштрасса, взагалі кажучи, вже не поширюється. Наприклад, функція $f(x) = x$ неперервна на інтервалі (0; 1), проте не досягає на цьому інтервалі своїх точної верхньої $M = 1$ і точної нижньої $m = 0$ меж. У цій теоремі істотно, що $[a, b]$ - обмежена множина. Наприклад, функція $f(x) = arctgx$, як це буде доведено в наступному параграфі, неперервна на **R** (необмеженій множині), проте не досягає на **R** своєї точної верхньої межі $M = \pi/2$ і точної нижньої межі $m = -\pi/2$.

Теорема 2.15 (друга теорема Больцано-Коші). Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, причому $f(a) \neq f(b)$, а C- деяке число, що лежить між $f(a)$ і $f(b)$. Тоді існує принаймні одна точка $c \in (a, b)$ така, що $f(c) = C$.

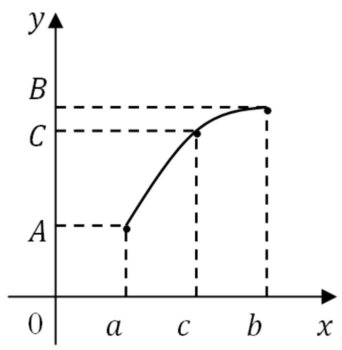


Рисунок 2

Наслідок. *Множиною значень відмінної від сталої функції* $f(x)$, *неперервної на відрізку* $[a, b]$, *є відрізок* $[m, M]$, *де* $M = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, $m = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.

Дійсно, за другою теоремою Вейєрштрасса існують точки x_1, $x_2 \in [a, b]$, для яких $f(x_1) = M$, $f(x_2) = m$ $(m < M)$.

За другою теоремою Больцано-Коші кожне число C таке, що $m < C < M$, є значенням неперервної на відрізку $[a, b]$ функції $f(x)$ у деякій точці $c \in (a, b)$. Отже, саме відрізок $[m, M]$ — множина значень відмінної від тотожно сталої неперервної на відрізку $[a, b]$ функції $f(x)$.

Теорема 2.16. Нехай функція $y = f(x)$ неперервна й строго монотонна на відрізку $[a, b]$. Тоді обернена функція $x = g(y)$ також неперервна й строго монотонна на відрізку $[m, M]$.

2.10 НЕПЕРЕРВНІСТЬ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ

Як відомо зі шкільного курсу математики, ***основними елементарними функціями*** є:

1) стала $f(x) = C, x \in \mathbf{R}$;

2) степенева $f(x) = x^n, x \in \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$, або $f(x) = x^{1/n}, x \geq 0$ (n – парне) і $x \in \mathbf{R}$ (n- непарне), або в загальному вигляді $f(x) = x^a, x > 0$, $a \in \mathbf{R}$;

3) показникова $f(x) = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1,\ x \in \mathbf{R}$;

4) логарифмічна $f(x) = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0$;

5) тригонометричні $f(x) = \sin x, x \in \mathbf{R}$; $f(x) = \cos x, x \in \mathbf{R}$; $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + n\pi\,;\ \frac{\pi}{2} n\pi\right) (n \in \mathbf{Z})$; $f(x) = \operatorname{ctg} x, x \in (n\pi;\ \pi + n\pi)$ $(n \in \mathbf{Z})$;

6) обернені тригонометричні $f(x) = \arcsin x, x \in [-1; 1]$; $f(x) =$

$= \arccos\ x,\ x \in [-1; 1]$; $f(x) = \operatorname{arctg} x, x \in \mathbf{R}$; $f(x) = \operatorname{arcctg} x,\ x \in \mathbf{R}$.

Встановимо неперервність деяких з цих функцій у відповідних областях їх визначення, а саме 1), 2), 3) і 6).

(1) Нехай $x_0 \in \mathbf{R}$. Для будь-якого $\varepsilon > 0$ покладемо $\delta = \varepsilon$. Тоді при всіх x, які задовольняють нерівність $|f(x) - f(x_0)| = |C - C| = 0 < \varepsilon$, так що стала функція неперервна на $\mathbf{R}$.

(2) Неперервність степеневої функції $f(x) = x^n$ при всіх $x = \mathbf{R}$ ($n \in \mathbf{N}$) негайно випливає з того, що $x^n = x \cdot x \cdot \dots \cdot x$(n разів) і теореми 2.11.

Згідно з останнім зауваженням п. 2.9 при $n = 2k$ $(k \in \mathbf{N})$ на $[0;\ +\infty)$ існує функція, обернена до функції $f(x) = x^{2k}$, яка є неперервною й зростаючою на $[0;\ +\infty)$. Як правило, її позначають так: $y = x^{\frac{1}{2k}} = \sqrt[2k]{x}$.

Так само, згідно з останнім зауваженням п. 2.9, при $n = 2k + 1$ $(k \in \mathbf{N})$ на $\mathbf{R}$ існує функція, обернена до функції $f(x) = x^{2k+1}$, яка є неперервною й зростаючою на $\mathbf{R}$. Зазвичай її позначають так: $y = x^{\frac{1}{2k+1}} = \sqrt[2k+1]{x}$.

(3) Нагадаємо, що (див. п. 1.2, приклад 1.1)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \tag{2.1}$$

і доведемо, що

$$\lim_{x\to 0} a^x = a^0 = 1,$$

тобто переконаємося в неперервності функції $f(x) = a^x$ у точці $x_0 = 0$.

Припустимо спочатку, що $a > 1$ і $x > 0$. Позначимо через n цілу частину числа $\frac{1}{x}$; тоді $n \leq \frac{1}{x}$ і $x \leq \frac{1}{n}$, а отже, $0 < a^x - 1 < a^{1/n} - 1$.

Зауважимо, що $n \to \infty$, якщо $x \to +0$, а тому згідно з формулою (2.1) і теоремою 2.5 маємо $\lim\limits_{x\to +0} a^x = 1$. У разі, якщо $x \to -0$, дістанемо

$$\lim_{x\to -0} a^x = \lim_{x\to -0} \frac{1}{a^{-x}} = 1,$$

оскільки за попереднім $\lim\limits_{x\to -0} a^{-x} = 1$ (тут $-x > 0$).

Поєднавши обидва випадки, матимемо $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$. Якщо $0 < a < 1$, то $\lim\limits_{x\to 0} a^x = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x} = 0$, оскільки за попереднім $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{a}\right)^x = 0$ (тут $\frac{1}{a} > 1$).

Для доведення неперервності функції $f(x) = a^x$ у довільній точці $x_0 \epsilon \mathbf{R}$ зазначимо, що

$$\lim_{x\to x_0} a^x = \lim_{x\to x_0} a^{x_0} \cdot a^{x-x_0} = a^{x_0} \lim_{x\to x_0} a^{x-x_0} = a^{x_0} \cdot 1 = a^{x_0}$$

(тут ураховано, що $x - x_0 \to 0$ при $x \to x_0$).

(6) Функція $f(x) = \sin x$ на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ є неперервною, зростаючою й має областю значень відрізок $[-1;\ 1]$.

Згідно з теоремою 5.16 на відрізку [-1; 1] існує функція, обернена до $f(x) = \sin x$, яка є неперервною й зростаючою на відрізку [-1; 1]. Її, як відомо, позначають $y = \arcsin x$.

Аналогічно для інших функцій пункту 6).

Нагадаємо, що *елементарними* називають функції, які можна дістати з основних елементарних функцій за допомогою скінченної кількості арифметичних операцій і суперпозицій основних елементарних функцій.

Згідно з теоремами 2.11 і 2.16 усі елементарні функції неперервні в областях їх визначення.

На підставі неперервності показникової та логарифмічної функції і другої важливої границі $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ встановленої в п. 1.3, можна довести кілька важливих рівностей. Їх можна розглядати як продовження списку важливих границь і успішно використовувати, зокрема, при обчисленні похідних від елементарних функцій.

Отже, виконуються такі рівності:

1) $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e,}$ $a > 0, a \neq 1.$ (2.2)

Зокрема, при $a = e$ $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1;$

2) $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = In\, a,}$ $a > 0.$ (2.3)

Зокрема, при $a = e$ $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1;$

3) $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha,}$ $\alpha \in \boldsymbol{R}.$ (2.4)

ІІІ. ПОХІДНІ Й ДИФЕРЕНЦІАЛИ

3.1 ПОНЯТТЯ ПОХІДНОЇ

Нехай функцію $y = f(x)$ визначено на проміжку $X = (a, b)$ (можливо, нескінченному). Візьмемо довільну точку $x_0 \in X$ і надамо їй довільного приросту $\Delta x \neq 0$ такого, щоб $x_0 + \Delta x \in X$. Функція в точці x_0 дістане відповідний приріст

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Означення 3.1. ***Похідною функції*** $\boldsymbol{y = f(x)}$ в точці $\boldsymbol{x_0}$ *називають границю відношення приросту цієї функції до приросту аргументу* Δx*, коли приріст аргументу прямує до нуля.*

Похідну позначають ще й так: $f'(x_0), y'(x_0), \frac{df(x_0)}{dx}, \frac{dy}{dx}, Dy, Df(x_0).$

Надалі здебільшого віддаватимемо перевагу першому позначенню, котре ввів Ж. Лагранж.

Отже, за означенням

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

називають ***диференціальним відношенням***.

У випадку, коли границя відношення при $\Delta x \to 0$ не існує, вважатимемо, що функція в точці x_0 не має похідної.

Якщо функція $y = f(x)$ має похідну в кожній точці $x \in X$, то цю похідну позначатимемо y' або $f'(x)$.

Отже, якщо x_0- фіксована точка проміжку *X*, то похідна $f'(x_0)$ у разі її існування – деяке число. Якщо ж похідна існує в кожній точці $x \in X,$ то $f'(x)$ – уже функція від *x*.

Зауваження. Зрозуміло, що границя існує не для будь-якої функції і не для кожної точки x_0. Наприклад, для функції $y = |x|$ у точці $x_0 = 0$ границя не існує, оскільки диференціальне відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} 1, \text{якщо } \Delta x > 0 \\ -1, \text{якщо } \Delta x < 0 \end{cases}.$$

Означення 3.2. *Функцією $y = f(x)$, яка має похідну в точці x_0, називають* ***диференційованою в точці*** *x_0. Функцію, диференційовану в кожній точці $x \in X$, називають* ***диференційованою на проміжку*** *X.*

Операцію відшукання похідної називають ***диференціюванням****.*

Теорема 3.1 (про зв'язок між поняттям диференційованості та неперервності). Якщо функція $y = f(x)$ диференційована в точці x_0, то вона в цій точці неперервна.

Д о в е д е н н я

Оскільки функція $f(x)$ диференційована в точці x_0, то існує границя

$$f'^{(x_0)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Запишемо тотожність $\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x}\Delta x$ і перейдемо в ній до границі, якщо $\Delta x \to 0$. Дістанемо

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x = f'(x_0)0 = 0.$$

А це й означає, що функція $y = f(x)$ неперервна в точці x_0.

Підкреслимо, що функція $f(x)$, неперервна в точці x_0, не обов'язково є диференційованою в цій точці. Так, наприклад, функція $y = |x|$, про яку йшлося вище, очевидно, є неперервною в точці $x_0 = 0$, проте похідної в цій точці немає.

Відомі приклади функцій, які неперервні на всьому проміжку *X*, проте в жодній точці *X* не мають похідної.

3.2 ЗМІСТ ПОХІДНОЇ

До поняття похідної приводять різноманітні задачі геометрії, механіки, хімії, економіки, біології та інших наук. Розглянемо деякі з них.

Задача про дотичну до кривої

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована в точці x_0, тобто існує похідна $f'(x_0)$. Рівняння січної MM_0, яка проходить через точки $M_0(x_0, f(x_0))$ і $M(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ графіка функції $y = f(x)$, має вигляд

$$Y = f(x_0) + \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}(X - x_0),$$

де X і Y – змінні координати точки січної. Кутовий коефіцієнт січної $\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ прямує до $f'(x_0)$. Тому граничне положення січної визначається рівнянням

$$Y = f(x_0) + f'(x_0)(X - x_0).$$

Пряма, яка задається цим рівнянням, називається ***дотичною до графіка функції*** $y = f(x)$ ***у точці*** x_0. Кутовий коефіцієнт дотичної $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$.

Остання формула розкриває геометричний зміст похідної: похідна $f'(x_0)$ функції $y = f(x)$ у точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнтові дотичної до графіка функції $y = f(x)$, проведеної в точці $(x_0, f(x_0))$.

Геометричне тлумачення похідної як кутового коефіцієнта дотичної до графіка функції поширюється й на випадок нескінченної похідної. В цьому разі дотична паралельна осі Oy.

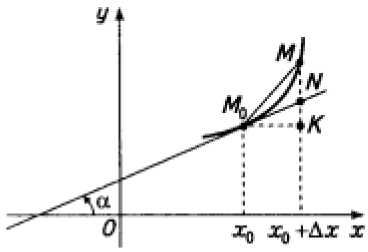


Рисунок 3

Задача про миттєву швидкість

Розглянемо нерівномірний прямолінійний рух тіла, що розпочинається в момент часу $t = 0$. Вважатимемо, що шлях, подоланий тілом за час t, дорівнює $S = S(t)$. Функція $S(t)$ називається *законом руху тіла.*

Шлях ΔS, який подолає тіло за інтервал часу $[t_0, t_0 + \Delta t]$, визначається так:

$$\Delta S = S(t_0 + \Delta t) - S(t_0).$$

Середньою швидкістю руху ϑ_c за інтервал часу Δt називається відношення

$$v_c = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t_0+\Delta t) - S(t_0)}{\Delta t},$$

в якому легко впізнати диференціальне відношення.

Миттєвою швидкістю руху $\boldsymbol{v(t_0)}$ у момент t_0 називається границя цього відношення, якщо $\Delta t \to 0$, тобто

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t_0+\Delta t) - S(t_0)}{\Delta t} = S'(t_0).$$

Отже, *похідна від шляху за часом дорівнює миттєвій швидкості прямолінійного руху тіла.*

3.3 ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

Теорема 3.2. Якщо функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ диференційовані в точці x, то функції $u(x) \pm v(x)$, $u(x)v(x)$, $\frac{u(x)}{v(x)}$ (в останньому випадку вважається, що $v(x) \neq 0$) також диференційовані в цій точці. Нехай $y = f[\varphi(x)]$- складна функція, де $y = f(u)$ і $u = \varphi(x)$ – диференційовані функції своїх аргументів. Точніше, зовнішня функція $y = f(u)$ в точці $u = \varphi(x)$ має похідну (по u) $y'_u = f'_u(u)$, а внутрішня функція $u = \varphi(x)$ у точці x – похідну (по x) $u'_x =$

$\varphi'(x)$. Тоді складна функція $y = f[\varphi(x)]$ диференційована в точці x. Справджуються відповідно такі формули:

а) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

б) $(u\, v)' = u'v + uv'$;

в) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$;

г) $f'_x[\varphi(x)] = f'_u(u)\varphi'(x)$, або коротко $y'_x = y'_u u'_x$ чи $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$.

Д о в е д е н н я

Доведемо пункти б) і г).

б) Надамо x деякого приросту Δx. Тоді функції u і v матимуть прирости Δu і Δv відповідно, а функція $y = uv$ – приріст

$$\begin{aligned}\Delta y = u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)\\ &= [u(x+\Delta x) - u(x)]v(x+\Delta x) + +u(x)[v(x+\Delta x) - v(x)]\\ &= \Delta u v(x+\Delta x) + u(x)\Delta v\end{aligned}$$

Отже,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta v} v(x+\Delta x) + u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Зазначимо, що функція $v(x)$ неперервна в точці x, оскільки вона диференційована в цій точці, а тому $v(x+\Delta x) \to v(x)$ при $\Delta x \to 0$. Переходячи до границі $\Delta x \to 0$ в останній момент рівності, дістанемо $y' = u'v + uv'$, тобто функція uv дійсно диференційована в точці x і справджується формула б).

г) Надамо x деякого приросту $\Delta x \neq 0$. Тоді функція $u = \varphi(x)$ дістане приріст Δu, а функція $y = f(u) -$ приріст Δy. За умови $\Delta u \neq 0$ маємо:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Переходячи в цій рівності до границі при $\Delta x \to 0$, дістанемо

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u u'_x,$$

що й потрібно довести.

При доведенні враховано, що функція $u = \varphi(x)$ неперервна в точці x, оскільки вода диференційована в цій точці й, отже, $\Delta u \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Зауваження. Припущення, що досить малому $\Delta x \neq 0$ відповідає $\Delta u \neq 0$, звичайно ж, істотне. При $\Delta u = 0$, що буває дуже рідко, формулу диференціювання складної функції неважко вивести дещо іншим способом.

3.4 ДИФЕРЕНЦІЙОВАНІСТЬ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ

У попередньому параграфі розглянуто правила обчислення похідних для функцій однієї змінної. Вони дають змогу знаходити похідні будь-яких елементарних функцій, якщо відомі похідні основних елементарних функцій.

Доведемо, що всі основні елементарні функції (за винятком $\arcsin x$ і $\arccos x$) диференційовані на своїх областях визначення, причому справджуються формули, які запишемо в так звану **таблицю похідних**.

1. $(C)' = 0$.
2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.
3. $(a^x)' = a^x \ln a, (e^x)' = e^x$.
4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln x}, (\ln x)' = \frac{1}{x}$.
5. $(\sin x)' = \cos x$.
6. $(\cos x)' = -\sin x$.
7. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x| < 1)$.
10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x| < 1)$.
11. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.
12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.
13. $(sh\, x)' = ch\, x$.
14. $(ch\, x)' = sh\, x$.

Д о в е д е н н я

Доведемо пункти 1) та 5).

1) Нехай на деякому проміжку X задано сталу функцію $y = C$. Тоді для довільних точок $x \in X$ і $x + \Delta x \in X (\Delta x \neq 0)$ маємо $y = f(x) = C$ і $y + \Delta y =$

$$= f(x + \Delta x) = C. \text{Отже}, \Delta y = 0, \text{а тому } \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,\ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0 \text{ і } y' = 0.$$

Для скорочення подальшого доведення подаємо формули у конспективному вигляді.

5) $y = \sin x; \quad y + \Delta y = \sin(x + \Delta x);$

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{x}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \cdot \cos x = \cos x\,;$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

[ураховано першу важливу границю і неперервність функції cos x].

Наголосимо, що таблиця похідних разом із правилами диференціювання становлять основу диференціального числення. Користуючись ними, можна знаходити похідні від функцій, які утворені за допомогою арифметичних операцій та суперпозицій над основними елементарними функціями, тобто від будь-яких елементарних функцій перейти знову до елементарних. Отже, операція диференціювання не виводить із класу елементарних функцій.

3.5 ПОХІДНІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Нехай функція $y = f(x)$ має похідну на проміжку *X*. Якщо в точці $x_0 \in X$ похідна $f`(x)$, своєю чергою, диференційована, то її похідну називають ***похідною другого порядку*** *або* ***другою похідною функцією*** $y = f(x)$ у точці $x_0 \in X$ і позначають у такі способи: $f''(x_0), y''(x_0), \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}, \frac{d^2 y}{dx}, D^2 y, D^2 y(x_0)$.

Означення 3.3. Нехай функція $y = f(x)$ має на проміжку *X* похідні $f'(x)$, $f''(x)$, $\dots, f^{(n-1)}(x)$. *Якщо в точці* $x_0 \in X$ *існує похідна функції* $f^{(n-1)}(x)$, *то її називають* ***похідною n-го порядку*** *функції* $f(x)$ *у точці* x_0 *і позначають у такі способи:* $f^{(n)}(x_0), y^{(n)}(x_0), \frac{d^{(n)} f(x_0)}{dx^n}, \frac{d^n y}{dx^n}, D^n y, D^n f(x_0)$.

Отже, якщо функція $y = f(x)$ має в точці x похідні $n -$ го порядку включно , то $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$.

Означення 3.4. *Функцію $y = f(x)$, яка має на деякому проміжку X похідні до n-го порядку включно, називають **n разів диференційованою на** X. Функцію, яка має на X похідні всіх порядків, називають **нескінченно диференційованою на** X.*

З означень безпосередньо впливає, що

$$[c_1 u(x) + c_2 v(x)]^{(n)} = c_1 u^{(n)}(x) + c_2 v^{(n)}(x),$$

де c_1 і c_2- довільні сталі, а $u(x)$ і $v(x) - n$ разів диференційовані функції.

У загальному випадку для обчислення похідної вищого порядку потрібно спочатку знайти похідні всіх нижчих порядків. У окремих випадках вдається встановити загальний вираз для похідної *n*-го порядку.

Приклад 3.1. *Знайти похідну n-го порядку функції* $y = x^\alpha, \alpha \in R, x > 0$.

Маємо послідовно

$$y' = \alpha x^{\alpha-1}, \qquad y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}, \ . \ . \ . \ ,$$

$$y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}.$$

3.6 ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована в точці x, тобто існує границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Згідно з теоремою 2.7 для всіх значень із досить малого околу точки x маємо рівність

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x),$$

де $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Звідси

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x), \Delta x \to 0,$$

де $o(\Delta x)$ – нескінченно мала вищого порядку порівняно з Δx.

Зауваження. Якщо, навпаки, в точці *x* для приросту функції виконується рівність

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x), \Delta x \to 0,$$

де A – стала, то функція $f(x)$ диференційована в точці x і $A = f'(x)$.

Дійсно, з останньої формули

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}, \Delta x \to 0;$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A.$$

Означення 3.5. ***Диференціалом функції*** *$y = f(x)$ у точці x називають головну, лінійну відносно Δx частину приросту функції в цій точці:*

$$dy = df(x) = f'(x)\Delta x.$$

Диференціалом незалежної змінної x вважатимемо його приріст Δx, тобто $dx = \Delta x$. Отже, $dy = f'(x)dx$.

Зауваження. З останньої формули випливає, що $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$. Саме тому похідну часто позначають $\frac{dy}{dx}$ або $\frac{df}{dx}$ і розуміють її як відношення двох диференціалів: диференціала функції до диференціала аргументу.

Оскільки $dx = \Delta x = x - x_0$, то

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = df(x_0) + o(\Delta x),$$

і при досить малих Δx справджується формула

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x,$$

якою часто користуються при наближених обчисленнях.

Із правил диференціювання випливають *правила обчислень диференціалів функцій:*

а) $d(u \pm v) = du \pm dv$;

б) $d(u\,v) = v\,du \pm u\,dv$;

в) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$ $(v(x) \neq 0)$.

IV. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНИХ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

4.1 ТЕОРЕМИ ПРО СЕРЕДНЄ ЗНАЧЕННЯ

Дослідження функцій за допомогою похідних ґрунтуються на деяких основних теоремах диференціального числення.

Теорема 4.1 (Ролля). Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, диференційована на інтервалі (a, b) і $f(a) = f(b)$. Тоді існує принаймні одна точка $c \in (a, b)$ така, що $f'(c) = 0$.

Теорема 4.2 (Лагранжа). Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і диференційована на інтервалі (a, b). Тоді існує принаймні одна точка $c \in (a, b)$ така, що

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Геометрично теорема Лагранжа означає, що серед усіх дотичних до графіка функцій $y = f(x)$ знайдеться принаймні одна, паралельна січній AB, яка сполучає точки $A(a, f(a))$ і $B(b, f(b))$. Справді, (рис. 2) відношення $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ є кутовим коефіцієнтом січної AB, а $f'(c)$ – кутовим коефіцієнтом дотичної до графіка, проведеної в точці $\big(c, f(c)\big)$. Ці коефіцієнти рівні між собою, отже, дотична й січна AB дійсно паралельні.

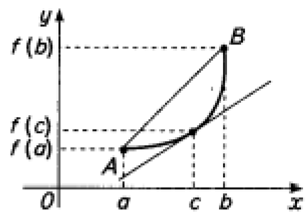


Рисунок 4

Теорема 4.3 (Коші). Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні на відрізку $[a, b]$ і диференційовані на інтервалі (a, b), причому $g'(x) \neq 0$ в усіх точках $x \in (a, b)$. Тоді існує принаймні одна точка $c \in (a, b)$ така, що

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

4.2 ПРАВИЛО ЛОПІТАЛЯ

При дослідженні функцій часто необхідно знаходити границі дробу $\frac{f(x)}{g(x)}$, чисельник і знаменник якого при $x \to a$ прямують до нуля або до нескінченності. Знаходження таких границь називають *розкриттям невизначеностей*. Найбільш простими є ефективними методами розкриття невизначеностей є правила Лопіталя.

Теорема 4.4 (перше правило Лопіталя). Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовані на інтервалі (a, b): $\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a+0} g(x) = 0$ і $g(x) \neq 0$ на (a, b). Тоді, якщо існує границя (скінченна або нескінченна)

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K,$$

то границя $\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)}$ також існує і $\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = K$.

Д о в е д е н н я

Обмежимося лише випадком $K \in R$. Нехай $x \in (a, b)$. Довизначимо функції $f(x)$ і $g(x)$ к точці a, поклавши $f(a) = g(a) = 0$. Тоді вони, очевидно, стануть неперервними на відрізку $[a, x]$ і задовольнятимуть на ньому всі вимоги теореми 3 (Коші). А тому знайдеться така точка $c \in (a, x)$, що

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Якщо $x \to a + 0,$ то й $c \to a + 0$. Переходячи до границі в останній рівності, маємо

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K,$$

що й потрібно довести.

Зауваження. Теорему 4 доведено для правих границь. Вона залишається правильною й для лівих і до границь взагалі.

При розкритті невизначеностей іншого типу діє теорема, яку наводимо без доведення.

Теорема 4.5 (друге правило Лопіталя). Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовані на інтервалі (a, b); $\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a+0} g(x) = \infty$ і $g(x) \neq 0$,

$g'(x) \neq 0$ на (a, b). Тоді, якщо існує границя (нескінченна або скінченна) $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K$, то границя $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)}$ також існує і $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = K$.

Теореми 4.4 і 4.5 застосовні до випадків, коли обидві функції $f(x)$ і $g(x)$ при $x \to a$ одночасно прямують до нуля або до нескінченності. Відповідно, знаходження $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ називають *розкриттям невизначеностей типу* $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$.

4.3 ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Розглянемо одну з найважливіших формул диференціального числення, яка широко застосовується при дослідженні функцій і наближення обчисленнях.

Припустимо, що функція $y = f(x)$ диференційована $(n+1)$ разів у деякому околі, що містить точку x_0. Доберемо многочлен

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \cdots + A_n(x - x_0)^n$$

степені *n* такий, що його значення й значення його похідних *n*-го порядку включно в точці x_0 збігаються зі значенням функції та її відповідних похідних у цій точці, тобто $P_n(x_0) = f(x_0)$, $P_n'(x_0) = f'(x_0)$, $P_n''(x_0) = f''(x_0), \dots$, $P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$.

Тоді шуканий многочлен набуває вигляду

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Це так званий *многочлен Тейлора* для функції $f(x)$.

Позначимо через $R_n(x)$ різницю між заданої функцією $f(x)$ та її многочленом Тейлора $f(x) - P_n(x) = R_n(x)$. Тоді $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ або

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x).$$

Цю формулу називають ***формулою Тейлора функції*** $f(x)$, а $R_n(x)$ – *залишковим членом формули Тейлора.*

Залишковий член можна подати у формі

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Цей вираз для $R_n(x)$ називається *залишковим членом у формі Лагранжа.*

Формула Тейлора запишеться у вигляді

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

При $x_0 = 0$ формула Тейлора набуває вигляду

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

де $0 < \theta < 1$, називається *формулою Маклорена.*

Визначимо формули Маклорена для конкретних найважливіших функцій.

Приклад 4.1. *Функція* $f(x) = e^x$.

Для цієї функції $f^{(n)}(x) = e^x, f^{(n)}(0) = 1, f^{(n+1)}(\theta x) = e^{\theta x}$ $(0 < \theta < 1)$, і формула Маклорена має вигляд

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, (0 < \theta < 1).$$

Приклад 4.2. *Функція* $f(x) = \ln(1+x)$.

Для цієї функції

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \qquad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!,$$

$$f^{(n+1)}(\theta x) = \frac{(-1)^{n-1}n!}{(1+\theta x)^{n+1}}, \qquad (0 < \theta < 1).$$

і формула Маклорена має вигляд

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}},$$

$$(0 < \theta < 1).$$

Покажемо застосування формули Маклорена при наближених обчисленнях. Відкинувши в ній залишковий член, матимемо

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Ця формула фактично наближено замінює функцію $f(x)$ многочленом. Для з'ясування точності такого наближення потрібно вказати межі похибки залишкового члена. Наприклад, для функції $f(x) = e^x$ дістанемо наближену формулу $e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$. Ураховуючи, що $R_n(x) = e^{\theta x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ $(0 < \theta < 1)$, при $|x| \le 1$ маємо

$$|R_n(x)| < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Якщо, зокрема, $x = 1$, то $e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$. Візьмемо, наприклад, $n = 6$. Після відповідних дістанемо $e \approx 2{,}718$, причому похибка не перевищує $\frac{3}{7!}$, що значно менше за 0,001.

V. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНИХ ДО ПОБУДОВИ ГРАФІКІВ

5.1 УМОВИ МОНОТОННОСТІ ФУНКЦІЇ

Означення 5.1. *Функцію $f(x)$ називають* ***зростаючою (спадною)*** *на деякому проміжку X, якщо для будь-яких $x_1, x_2 \in X$ таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$ (відповідно $f(x_1) > f(x_2)$).*

Теорема 5.1 (достатні умови монотонності). Якщо функція $f(x)$ диференційована на проміжку X і $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) на X, то функція $f(x)$ зростаюча (спадна) на цьому проміжку.

5.2 УМОВИ ЛОКАЛЬНОГО ЕКСТРЕМУМУ

Означення 5.2. *Точку x_0 називають* ***точкою строгого локального мінімуму (максимуму) функції*** *$f(x)$, якщо при всіх $x \ne x_0$ із деякого σ-околу точки x_0 виконається нерівність*

$$f(x) > f(x_0) \quad \big(f(x) < f(x_0)\big).$$

Аналогічно, *якщо в деякому δ-околі точки x_0 виконується нерівність*

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \big(f(x) \leq f(x_0)\big),$$

то точку x_0 називають ***точкою локального мінімуму (максимуму).***

Часто для скорочення слова *локальний* не вживають.

Точки мінімуму й максимуму функції називають ***точками екстремуму,*** *а значення функції в цих точках –* ***її екстремумами.***

Теорема 5.2 (необхідні умови екстремуму). Якщо точка x_0 є точкою екстремуму функції $f(x)$ і в цій точці функція диференційована, то $f'(x_0) ==$ 0.

Точки, в яких похідна дорівнює нулю, називають *стаціонарними.* Стаціонарні точки, а також точки, де функція визначена, але її похідна не існує, називають *критичними.* Саме серед них слід шукати точки екстремуму.

Теорема 5.3 (достатні умови строгого екстремуму). Нехай функція $f(x)$ неперервна в деякому δ-околі точки x_0: $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, диференційована в ньому, крій, можливо, самої точки x_0. Тоді, якщо $f'(x) < 0$ $(f'(x) > 0)$ при $x_0 - \delta < x < x_0$ і $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ при $x_0 < x < x_0 + \delta$, то точка x_0 є точкою строгого мінімуму (максимуму).

Коротко цю теорему формулюють так: якщо в точці x_0 похідна змінює знак із мінуса на плюс (із плюса на мінус), то x_0 – точка строгого мінімуму(максимуму).

5.3 УМОВИ ОПУКЛОСТІ Й УГНУТОСТІ

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована в деякому околі точки. Тоді

$$Y = f(x_0) + f'(x_0)(X - x_0)$$

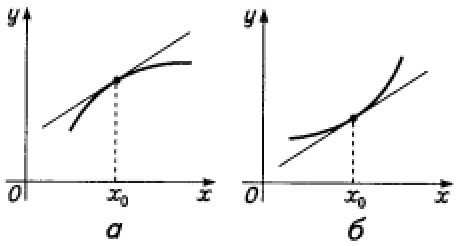
- рівняння дотичної до графіка функції $f(x)$ у точці x_0.

Означення 5.3. *Графік функції $y = f(x)$ називають* ***опуклим (угнутим)*** *у точці x_0 , якщо існує такий δ-окіл $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ цієї точки, що при всіх $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $(x \neq x_0)$, графік функції $f(x)$ розташований нижче (вище) від дотичної до графіка в точці $(x_0, f(x_0))$ (рис. 5), так що при вказаних x виконується нерівність*

$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\left(f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\right).$$

Означення 5.4. Нехай функція $f'(x)$ неперервна в деякому околі точки x_0. *Точку* x_0 *називають* ***точкою перегину графіка функції*** $y = f(x)$*, якщо існує такий її* δ*-окіл, по різні боки якого маємо опуклий та угнутий графіки функції (рис. 6).*



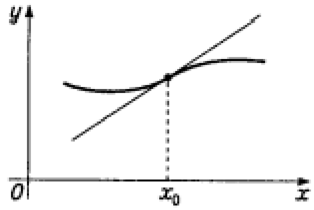


Рисунок 5 Рисунок 6

Теорема 5.4 (достатні умови опуклості й угнутості). Нехай функція $f(x)$ має в точці x_0 неперервну другу похідну $f''(x)$. Тоді, якщо $f''(x_0) > 0$ $(f''(x_0) < 0)$, то графік функції є вгнутим (опуклим) у точці x_0.

Теорема 5.5 (достатні умови точки перегину). Нехай функція $f(x)$ має в точці x_0 неперервну третю похідну $f'''(x)$, причому $f''(x_0) = 0$, а $f'''(x_0) \neq \neq 0$. Тоді точка x_0 є точкою перегину графіка функції $y = f(x)$.

5.4 АСИМПТОТИ. ДОСЛІДЖЕННЯ ГРАФІКА ФУНКЦІЇ В ЦІЛОМУ

При вивченні поведінки функції, якщо $x \to +\infty(-\infty)$ або поблизу точок розриву другого роду, часто трапляється, що графік функції як завгодно наближається до тієї чи іншої прямої. Ці прямі називають ***асимптотами.***

Означення 5.5. *Пряму* $x = a$ *називають* ***вертикальною асимптотою графіка функції*** $y = f(x)$**,** якщо хочу б одна з границь $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ або $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ нескінченна.

Наприклад, пряма $x = 3$ – вертикальна асимптота графіка функції $y = \frac{1}{x-3}$, оскільки

$$\lim_{x\to 3+0} \frac{1}{x-3} = +\infty, \quad \lim_{x\to 3-0} \frac{1}{x-3} = -\infty.$$

Означення 5.6. *Пряму* $y = kx + b$ *називають* ***похилою асимптотою графіка функції*** $y = f(x)$ при $x \to +\infty(-\infty)$, якщо

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx-b]=0 \quad (\lim_{x\to-\infty}[f(x)-kx-b]=0).$$

Теорема 5.6. Аби пряма $Y=kx+b$ була похилою асимптотою графіка функції $y=f(x)$ при $x\to+\infty(-\infty)$, необхідно й достатньо, щоб існували границі

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k, \quad \lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=b$$

$$(\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=k, \quad \lim_{x\to-\infty}[f(x)-kx]=b).$$

Д о в е д е н н я

Необхідність. Заради конкретності розглядатимемо випадок, коли $x\to+\infty$. Нехай $Y=kx+b$ – похила асимптота графіка функції $y=f(x)$ при $x\to+\infty$. Оскільки

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{f(x)-kx-b}{x}+k+\frac{b}{x};\ f(x)-kx=[f(x)-kx-b]+b,$$

то в силу означення 5.6

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k, \quad \lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=b.$$

Достатність. Нехай існують границі, вказані в теоремі. Тоді з другої границі випливає, що $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx-b]=0$, а тому пряма $Y=kx+b$ дійсно є похилою асимптотою графіка функції $y=f(x)$ при $x\to+\infty$.

При дослідженні графіка функції в цілому рекомендується, наприклад, схема, за якою слід знайти:

1) область визначення функції, її точки розриву й проміжки неперервності;
2) асимптоти графіка функції;
3) точки локального екстремуму функції;
4) проміжки монотонності функції;
5) точки перегину, проміжки опуклості й угнутості.

VI. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

6.1 РОЗБИТТЯ ІНТЕРВАЛУ

Означення 6.1. *Множину* $T = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ *називають* ***подрібненням замкненого проміжку*** $[a, b]$; $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ – ***проміжки подрібнення;*** *максимальна довжина проміжків подрібнення* $[x_i, x_{i+1}]$ *зветься* ***рангом подрібнення*** *T і позначається через* $\lambda(T)$.

Послідовність подрібнень T_m *проміжку* $[a, b]$ *називають* ***нормальною,*** *якщо відповідна послідовність рангів* $\lambda(T_m)$ *прямує до нуля:* $\lim\limits_{m\to\infty} \lambda(T_m) = 0$.

Приклад 6.1. $T = \{1 < 1{,}2 < 1{,}4 < 1{,}7 < 2\}$ – подрібнення проміжку $[1; 2]$ на чотири частини; його ранг $\lambda(T) = 0{,}3$.

Приклад 6.2. $T_n = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$, де $x_1 = x_0 + \frac{b-a}{n}$, $x_2 = x_1 + + \frac{b-a}{n}, \ldots, x_n = x_{n-1} + \frac{b-a}{n}$, тобто T_n – подрібнення проміжку $[a, b]$ на n однакових за довжиною проміжків; $\lambda(T_n) = \frac{b-a}{n}$, T_n – нормальна послідовність подрібнень проміжку $[a, b]$.

6.2 ОЗНАЧЕННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛУ

Означення 6.3. Нехай $T = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ – подрібнення проміжку $[a, b]$, $f(x)$ – функція визначена на $[a, b]$, $c_1 \in [x_0, x_1]$, $c_2 \in [x_1, x_2]$, …, $c_n \in [x_{n-1}, x_n]$ – довільні точки проміжків подрібнення T. *Суму*

$$\sigma(T) = f(c_1)(x_1 - x_0) + f(c_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(c_n)(x_n - x_{n-1})$$

називають ***інтегральною сумою функції*** $f(x)$ *для подрібнення* T. Зрозуміло, що вона залежить від вибору точок c_i $(i = 1; 2; \ldots; n)$.

На рис. 2 інтегральна сума – площа заштрихованої фігури, складеної з прямокутників.

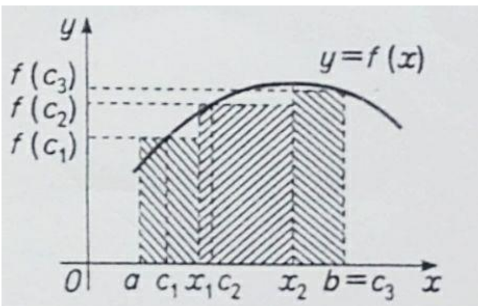


Рисунок 7

Означення 6.4. Нехай T_n – нормальна послідовність подрібнень проміжку $[a,b]$, $f(x)$ – визначена $[a,b]$ функція, $\sigma(T_n)$ – послідовність інтегральних сум. *Якщо існує границя* $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma(T_n)$, *яка не залежить ні від вибору нормальної послідовності* T_n, *ні від вибору внутрішніх точок при утворенні інтегральних сум* $\sigma(T_n)$, *то її називають* ***визначеним інтегралом функції*** $f(x)$ ***на проміжку*** $[a,b]$ *і позначають так:* $\int_a^b f(x)dx$ (інтеграл від a до b еф від ікс де ікс).

Означення 6.5. Нехай функція $f(x)$ визначена й обмежена на проміжку $[a,b]$; $T=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$ – подрібнення $[a,b]$ на проміжки $[x_i,x_{i+1}]$, $i=0;1;\dots;n-1$; m_k – точна нижня межа, а M_k – точна верхня межа множини значень функції $f(x)$ на $[x_{k-1},x_k]$. Суму

$$S_T=m_1(x_1-x_0)+m_2(x_2-x_1)+\cdots+m_n(x_n-x_{n-1})$$

називають ***нижньою,*** *а*

$$S^T=M_1(x_1-x_0)+M_2(x_2-x_1)+\cdots+M_n(x_n-x_{n-1})$$

- ***верхньою інтегральними сумами,*** *пов'язаними з подрібненням T проміжку* $[a,b]$.

Поняття верхньої (*б*) та нижньої (*а*) інтегральних сум геометрично ілюструє рис. 8. В обох випадках це площі фігур, складених з прямокутників.

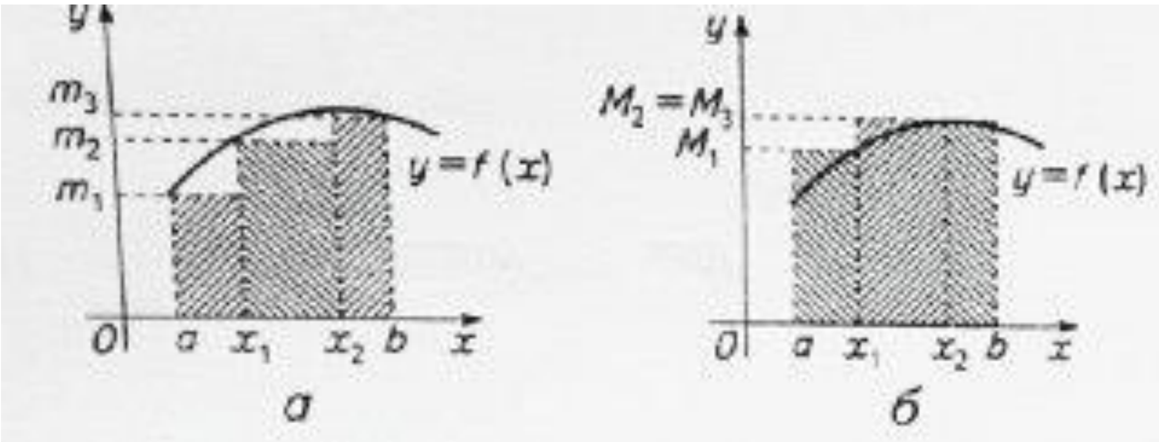


Рисунок 8

Теорема 6.1. (ознака існування визначеного інтеграла). Якщо $f(x)$ – визначена й обмежена на проміжку $[a,b]$ функція і для довільного $\varepsilon>0$ є таке подрібнення T цього проміжку $S_T-S^T<\varepsilon$, то $\int_a^b f(x)dx$ існує.

Наслідок. Якщо функція $f(x)$неперервна на проміжку $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx$ існує.

Справді, нехай $\varepsilon > 0$. Оскільки неперервна на замкненому проміжку $[a, b]$ функція рівномірно неперервна на ньому то існує таке подрібнення T проміжку $[a, b]$, що на кожному його проміжку коливання функції $f(x)$ (різниця між найбільшим і найменшим значеннями) менше від $\frac{\varepsilon}{b-a}$. Тому

$S^T - S_T = (M_1 - m_1)(x_1 - x_0) + \cdots + (M_n - m_n)(x_n - x_{n-1}) < \frac{\varepsilon}{b-a}(x_1 - x_0) + \cdots + + \frac{\varepsilon}{b-a}(x_n - x_{n-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$

Приклад 6.3. $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ існує, бо функція $f(x) = \frac{1}{x}$ неперервна на проміжку $[1, 2]$. Щоб обчислити цей інтеграл, візьмемо нормальну послідовність подрібнень $T_n =$

$= \{1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 2\}$, де $x_k = q^k,\ q = \sqrt[n]{2}, (k = 1; 2; \ldots; n)$. За точки $c_1, c_2, \ldots, c_n$ беремо точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Будуємо інтегральні суми:

$$\sigma(T_n) = \frac{q-1}{q} + \frac{q^2-1}{q^2} + \cdots + \frac{q^n - q^{n-1}}{q^n} = n\left(1 - \frac{1}{q}\right) = \frac{1}{2^{\frac{1}{n}}} \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}.$$

Ураховуючи, що $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{1/n} = 1$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{1/n}-1}{\frac{1}{n}} = \ln 2$, дістаємо

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \lim_{n\to\infty} \sigma(T_n) = \ln 2.$$

Приклад 6.4. Розглянемо на проміжку [0;1] функцією Діріхле

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{якщо } x - \text{раціональне число} \\ 1, \text{якщо } x - \text{раціональне число.} \end{cases}$$

Нехай T_n- довільна нормальна послідовність подрібнень проміжку $[0, 1]$. Якщо всі точки c_1 раціональні, то $\sigma(T_n) = 0$, а якщо ірраціональні, то $\sigma(T_n) = 1$. Тому $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(T_n)$ залежить від вибору точок c_1. Ця границя дорівнює 0, або 1, або ж зовсім не існує. Отже, $\int_0^1 f(x)dx$ не існує.

6.3 ВЛАСТИВОСТІ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

1. Якщо $\int_a^b f(x)dx$ існує (функція $f(x)$ інтегрована на проміжку $[a, b]$), то для будь-якого числа a $\int_a^b a\, f(x)dx = a \int_a^b f(x)dx$.

2. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ інтегровані на проміжку $[a,b]$, то $f(x)+g(x)$ – також інтегрована на проміжку $[a,b]$ і

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx \ + \int_a^b g(x)dx.$$

3. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ інтегровані на проміжку $[a,b]$ і $f(x) \le g(x)$ для всіх $x \in [a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \ \le \int_a^b g(x)dx\,.$$

4. $\int_a^b \ dx = b-a.$
5. $\int_a^a f(x)dx \ = 0.$
6. $\int_b^a f(x)dx \ = -\int_a^b f(x)dx.$
7. Якщо $\int_a^b f(x)dx$ і $\int_b^c f(x)dx$ існують, то

$$\int_a^b f(x)dx \ + \int_b^c f(x)dx \ = \int_a^c f(x)dx$$

(адитивна властивість інтеграла).

8. Якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a,b]$, то для певної точки $c \in [a,b]$ справджується рівність $\int_a^b f(x)dx \ = f(c)(b-a)$ (теорема про середнє значення інтеграла).
9. Якщо $f(x)$ неперервна на проміжку $[a,b]$ функція і $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, то $F'(x)= f(x)$ для всіх $x \in [a,b]$.

6.4 ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНІЦА

Якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a,b]$, то справджується формула Ньютона-Лейбніца

$$\int_a^b f(x)dx \ = \Phi(b)-\Phi(a),$$

де $\Phi(x)$ – довільна така функція, що $\Phi'(x) = f(x)$.

Справді, за властивістю 9 функція $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ саме така функція. Тому $\Phi(x) = C + F(x)$, де $C \in \boldsymbol{R}$, – довільна така функція, але тоді

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \left(\text{C} + \int_a^b f(t)dt \right) \ - \left(\text{C} + \int_a^a f(t)dt \right) \ = \int_a^b f(t)dt.$$

Зауваження. Різницю $\Phi(b) - \Phi(a)$ часто позначають так: $\Phi(x) \mid_a^b$.

6.5 ФОРМУЛА ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ

Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ неперервні на проміжку $[a, b]$. і мають неперервні похідні, то справедлива формула інтегрування частинами

$$\int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x) \mid_a^b - \int_a^b \ u'(x)\, v(x)\, dx.$$

Справді, оскільки $(u(x)\, v(x))' = u'(x)\, v(x) + \mathrm{u}(x)\, v'(\mathrm{x})$, то за формулою Ньютона-Лейбніца

$$\int_a^b \left(u'(x)\, v(x) + \ u(x)\, v'(x)\right) \ dx = u(x)\, v(x) \mid_a^b.$$

Далі до лівої частини слід застосувати властивість 2.

6.6 ФОРМУЛА ЗАМІНИ ЗМІННОЇ

Якщо:

а) функція $x = \varphi(t)$ неперервна на проміжку $[\alpha, \beta]$ і має на цьому проміжку неперервну похідну;

б) $\varphi(\alpha) = \ a, \ \ \varphi(\beta) = \ b$ і $\varphi(t) \in [\mathrm{a}, b]$ якщо $t \in [\alpha, \beta]$;

в) функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[\mathrm{a}, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\, dx \ \ = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt$$

(формула заміни змінної у визначеному інтервалі).

Справді, нехай $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на проміжку $[\mathrm{a}, b]$ (вона існує за властивістю 9). Тоді $F(\varphi(t))$ – первісна функції $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ на проміжку $[\alpha, \beta]$. Справді, $(F(\varphi(t)))' = F'\left(\varphi(t)\right) \varphi'(t) = \ f\left(\varphi(t)\right) \varphi'(t)$. Застосувавши двічі формулу Ньютона-Лейбніца, дістанемо

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F\big(\varphi(\beta)\big) - F\big(\varphi(\alpha)\big) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Приклад 6.5. *Обчислити* $\int_0^1 x\mathrm{e}^x dx$.

Застосуємо формулу інтегрування частинами, поклавши $u(x) = x$, $v'(x) = e^x$, $u'(x) = 1$, $v(x) = e^x$. Матимемо

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^x dx = x\mathrm{e}^x \Big|_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x dx = \mathrm{e} - \mathrm{e}^x \Big|_0^1 = \mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1) = 1.$$

Приклад 6.6. *Обчислити* $\int_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

Застосуємо заміну змінної $x = t^2$, $1 \le t \le 2$. Дістанемо:

$$\int_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int_1^2 \frac{2tdt}{t+1} = 2\int_1^2 \frac{(t+1)-1}{t+1} = 2\int_1^2 \left(1 + \frac{1}{t+1}\right)dt =$$
$$= 2\big(\mathrm{t} - \ln(\mathrm{t}+1)\big) \Big|_1^2 = 2((2-\ln 3) - (1 - \ln 2)) = 2\ln\frac{2e}{3}.$$

VII. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

7.1. ПЕРВІСНА ФУНКЦІЇ

Основна задача диференціального числення полягає в знаходженні похідної від заданої функції. Різноманітна питання вищої математики та її застосувань у фізиці, хімії, біології, техніці приводять до оберненої задачі: відшукання функції за її похідною. З математичного погляду для заданої функції $f(x)$ слід знайти таку функцію $F(x)$, похідна якої дорівнювала б $f(x)$.

Означення 7.1. *Функцію $F(x)$, визначену на проміжку $X = (a, b)$ (можливо, нескінченному), називають **первісною функції** $f(x)$ на цьому проміжку, якщо для кожного $x \in X$ похідна $F'(x)$ існує й справджується рівність $F'(x) = f(x)$.*

Операцію відшукування первісної для заданої функції називають **інтегруванням.** Наприклад, функція $F(x) = \frac{x^4}{4}$ – первісна функції $f(x) = x^3$ на множині $\mathbf{R}$, оскільки $\left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3$ для всіх $x \in \mathbf{R}$.

7.2 ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ПЕРВІСНОЇ

1. Якщо $F(x)$ – первісна деякої функції на проміжку X, то $F(x)$ – неперервна на X функція.

2. Якщо $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на проміжку $X = (a, b)$, то функція $\Phi(x) = F(x) + C$, де C – довільна стала, також є первісною функції $f(x)$ на X.

Наступна теорема визначає, що являє собою набір усіх первісних заданої функції.

Теорема 7.1. Якщо $F(x)$ є первісною функції $f(x)$ на проміжку X, то іншу довільну первісну $\Phi(x)$ функції $f(x)$ на X можна подати у вигляді $\Phi(x) = F(x) + C$, де C – довільна стала.

Д о в е д е н н я

За означенням первісної $F'(x) = f(x), \Phi'(x) = f(x)$. Знайдемо похідну функції $\Phi(x) - F(x)$:

$$[\Phi(x) - f(x)]' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

для всіх $x \in X$. Із наслідку теореми Лагранжа (7.2) ця функція є сталою на проміжку X, тобто $\Phi(x) - F(x) = C$. Таким чином, $\Phi(x) = F(x) + C$, де C – довільна стала, що й потрібно було довести.

7.3. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ І ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Означення 7.2. ***Невизначеним інтегралом функції*** *f(x) називають множину всіх її первісних.* Позначення невизначеного інтеграла: $\int f(x)dx$.

Отже, маємо $\int f(x)dx = F(x) + C$, де $F(x)$ – будь – яка первісна функції $f(x)$, а C – довільна стала.

Знак $\int$ називають ***знаком невизначеного інтеграла***, функцію $f(x)$ – ***підінтегральною функцією***, вираз $f(x)dx$ – ***підінтегральним виразом***.

Подамо найважливіші властивості невизначеного інтеграла без доведення в силу їх очевидності.

1. *Похідна невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції; диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу, тобто* $(\int f(x)dx)' = f(x),\ d\int f(x)dx = f(x)dx$.

2. *Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції та довільної сталої, тобто* $\int dF(x) = F(x) + C$.

3. *Сталий множник можна виносити з – під знаку інтеграла, тобто якщо* $k == const \neq 0$*, то* $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$.

4. *Невизначений інтеграл алгебраїчної суми двох функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів кожної з цих функцій окремо, тобто*

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

7.4. ТАБЛИЦЯ ОСНОВНИХ НЕВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

З означення інтеграла випливають такі формули, які надалі називатимемо ***табличними інтегралами.***

1) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\ (\alpha \neq -1)$;

2) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

3) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ (0 < a \neq 1)$;

4) $\int e^x dx = e^x + C$;

5) $\int \cos x\, dx = sinx + C$;

6) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$;

7) $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tg\, x + C$;

8) $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C$;

9)) $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg\, x + C$;

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsin\, x + C$;

11) $\int ch\, x\, dx = sh\, x + C$;

12) $\int sh\, x\, dx = ch\, x + C$;

13) $\int \frac{dx}{ch^2 x} = th\, x + C$;

14) $\int \frac{dx}{sh^2x} = -cth\, x + C;$

15) $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C;$

16) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C.$

Метод безпосереднього інтегрування базується саме на застосуванні інтегралів і основних властивостей невизначеного інтеграла.

Приклад 7.1. *Обчислити* $\int \frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$

Зауважимо спочатку, що $\frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}} = x^{\frac{1}{3}} + 2x^{-\frac{2}{3}}$. Звідси на підставі властивостей 3,4 й табличного інтеграла (1) маємо

$$\int \frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx + 2\int x^{-\frac{2}{3}} dx = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + 6x^{\frac{1}{3}} + C = \frac{3}{4} x\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[3]{x} + C.$$

Приклад 7.2. *Обчислити* $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx.$

Ураховуючи, що $\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{x+1-1}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$, на підставі властивості 4 й табличних інтегралів (1) і (9) маємо

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int 1\, dx - \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = x - arctgx + C.$$

Приклад 7.3. *Обчислити* $\int ctg^2 x dx$

Зауважимо, що $ctg^2x = \int \frac{1}{sin^2x} - 1$. Звідси на підставі властивостей 4 й табличного інтеграла (1) і (8) маємо

$$\int ctg^2xdx = \int \frac{1}{sin^2x} dx - \int dx = -ctgx - x + C.$$

Приклад 7.4. *Обчислити* $\int (2^x + 5^x)^2 dx.$

Ураховуючи, що $(2^x + 5^x)^2 = 2^{2x} + 2 \cdot 2^x \cdot 5^x + 5^{2x} = 4^x + 2 \cdot 10^x + 25^x$, на підставі властивостей 3, 4 й табличного інтеграла (3) маємо

$$\int (2^x + 5^x)^2 dx = \int 4^x dx + 2\int 10^x dx + \int 25^x dx = \frac{4^x}{ln4} + 2\frac{10^x}{ln10} + \frac{25^x}{ln25} + C.$$

Як бачимо, мистецтво інтегрування полягає в умінні за допомогою властивостей невизначеного інтеграла перетворити підінтегральний вираз на “табличний”. Потрібно домогтися, щоб він став таким, як в одному з табличних інтегралів, або спочатку хоча б спростився. Для цього застосовують різні методи інтегрування.

7.5. МЕТОД ЗАМІНИ ЗМІННОЇ

У багатьох випадках введення нової змінної інтегрування дає змогу звести відшукання даного інтеграла до знаходження табличного інтеграла. Цей спосіб називають **метод заміни змінної**, або **методом підстановки**. Він базується на такій теоремі.

Теорема 7.2. Нехай функція $x=\varphi(t)$ визначена й диференційована на проміжку T, а проміжок X – множина її значень. Нехай функція $y=f(x)$ визначена на проміжку X і має на ньому первісну $F(x)$. Тоді на проміжку T складна функція $F(\varphi(t))$ є первісною функції $f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)$, тобто

$$\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt = F\big(\varphi(t)\big)+C. \qquad (7.1)$$

Д о в е д е н н я

Згідно з правилом диференціювання складної функції, враховуючи, що $F'(x)=f(x)$, дістанемо

$$\Big(F\big(\varphi(t)\big)\Big)' = F'\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t) = f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t), \quad t\epsilon\, T.$$

Отже, функція $f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)$ дійсно має на проміжку T однією із своїх первісних функцію $F\big(\varphi(t)\big)$, тобто виконується співвідношення (7.1).

Оскільки

$$F\big(\varphi(t)\big)+C = (F(x)+C)|_{x=\varphi(t)} = \int f(x)dx\,|_{x=\varphi(t)},$$

то рівність (7.1) можна подати у вигляді

$$\int f(x)dx\,|_{x=\varphi(t)} = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt. \qquad (7.2)$$

Рівність (7.2) називають формулою заміни змінної в невизначеному інтегралі.

Зауваження. У випадку лінійної підстановки за умови, що $F(x)$ – первісна функції $f(x)$, маємо

$$\int f(x)dx = \frac{1}{a}F(ax)+C. \qquad (7.3)$$

Справді, поклавши $x=\frac{t}{a}$ (тоді $dx=\frac{1}{a}dt$), згідно з формулою (7.2) дістанемо

$$\int f(ax)dx = \frac{1}{a}\int f(t)dt = \frac{1}{a}F(t)+C = \frac{1}{a}F(t)+C = \frac{1}{a}F(ax)+C.$$

Приклад 7.5. *Обчислити* $\int \frac{dx}{a^2+x^2}, a\neq 0.$

Ураховуючи формулу (7.3),маємо

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C.$$

Приклад 7.6. *Обчислити* $\int \frac{dx}{x^2-a^2}, a \neq 0.$

Враховуючи формулу (7.3), маємо

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1} = \frac{1}{2a}\left|\frac{\frac{x}{a}-1}{\frac{x}{a}+1}\right| + C = \frac{1}{2a}ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

Приклад 7.7. *Обчислити* $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}, a \neq 0.$

Враховуючи формулу (7.3), маємо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm 1}} = ln\left|\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm 1}\right| + C$$

$$= ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C_1.$$

Цілком аналогічно

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arctg\frac{x}{a} + C, \qquad a \neq 0.$$

Поширений також спосіб тотожного перетворення підінтегрального виразу з виділенням диференціала нової змінної інтегрування.

Приклад 7.8. *Обчислити* $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}},\ a \neq 0.$

Враховуючи формулу (7.3), маємо

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm\frac{1}{a}\int \frac{d(a^2 \pm x^2)}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm\frac{1}{2}\int (a^2 \pm x^2)^{-\frac{1}{2}}\, d(a^2 \pm x^2) =$$

$$= \pm\frac{1}{2}2(a^2 \pm x^2)^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{a^2 \pm x^2} + C.$$

Є ще один не складний, але досить ефективний прийом обчислення інтегралів, який базується на очевидній формулі

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = ln|f(x)| + C \qquad (7.4)$$

Приклад 7.9. *Обчислити* $\int ctgxdx.$

Оскільки $ctg\ x = \frac{\cos x}{\sin x}$ і $(\sin x)' = \cos x$, за формулою (7.4) дістанемо

$$\int ctg\ x\, dx = \int \frac{(\sin x)'\, dx}{\sin x} = ln|\sin x| + C.$$

Приклад 7.10. *Обчислити* $\int \frac{x\, dx}{x^2+4}$.

Зауважимо, що $(x^2+4)' = 2x$, а тому за формулою (7.4)

$$\int \frac{x\, dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+4)'dx}{x^2+4} = \ln(x^2+4) + C.$$

Розглянемо ще кілька прикладів, пов'язаних з підстановками різних типів. Для скорочення розв'язання прикладів надалі наводиться в конспективному вигляді: після умови вказано підстановку та наведено інші необхідні викладки.

Приклад 7.11.

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \begin{vmatrix} x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{vmatrix} = \int \frac{2tdt}{1+t} = 2\int \frac{t+1-1}{t+1}dt =$$

$$= 2\int dt - 2\int \frac{dt}{t+1} = 2t - 2ln|t+1| + C = 2\sqrt{x} - 2\ln\left(\sqrt{x}+1\right) + C.$$

Приклад 7.12.

$$\int \frac{dx}{1+e^{3x}} = \begin{vmatrix} e^{3x} = t, x = \dfrac{lnt}{3} \\ dx = \dfrac{dt}{3t} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t(t+1)} = \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)dt = \frac{1}{3}ln|t| - \frac{1}{3}ln|t+1| + C =$$

$$= x - \frac{1}{3}\ln(1+e^{3x}) + C.$$

Приклад 7.13.

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \begin{vmatrix} x = a\, sin\, t,\ |x| \le a \\ dx = a\cos t\, dt,\ |t| \le \dfrac{\pi}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= \int \sqrt{a^2 - a^2 sin^2 t}\, a\cos t\, dt = a^2\int (1 + cos2t\,)dt = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}sin2t + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{|a|} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Приклад 7.14.

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \left| \begin{matrix} x = a\,tg\,t,\ |x| \le \frac{\pi}{2} \\ dx = \frac{a\,dt}{cos^2t},\ t\epsilon R \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{a\,dt}{(a^2tg^2t+a^2)^{\frac{3}{2}}\,cos^2t} = \frac{1}{a^2}\int \cos t\,dt = \frac{1}{a^2}\sin t + C =$$

$$= \frac{1}{a^2}\sin\left(arctg\frac{x}{a}\right) + C = \frac{1}{a^2}\,\frac{x}{|a|\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}} + C = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + C.$$

7.6. МЕТОД ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ

До досить ефективних методів інтегрування належить метод інтегрування частинами. Він базується на такій теоремі

Теорема 7.3. Нехай функції $u(x)$ і $v(x)$ визначені та диференційовані на проміжку X і, крім того, на цьому проміжку існує первісна функції $u'(x)v(x)$. Тоді на проміжку X існує первісна функції $u(x)v'(x)$, причому справджується формула

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx. \qquad (7.5)$$

Д о в е д е н н я

Функція $u(x)v(x)$ є очевидно однією з первісних функції $u'(x)v(x) + +u(x)v'(x)$ на проміжку X, а тому

$$\int (\,u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\,)dx = u(x)v(x) + C.$$

З урахуванням припущення про існування первісної функції $u'(x)v(x)$ і властивостей 3,4 невизначеного інтеграла матимемо потрібну формулу (7.5).

Оскільки $u'(x)dx = d\mathrm{u}$, $v'(x)dx = dv$, то формулу (7.5) можна звести до вигляду

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \qquad (7.6)$$

Рівність (7.6) називають формулою інтегрування частинами, а інтегрування з її використанням - інтегруванням частинами. Відшукання даного інтеграла при цьому зводиться до знаходження іншого. Головний зміст формули (7.6) полягає в тому, що у результаті її застування цей новий інший інтеграл виявився або табличним, або став хоча б простішим, ніж даний.

На практиці для застосування формули (7.6) підінтегральний вираз розбивають на два множники. Один із них позначають через u, а інший через dv. Потім диференціюванням знаходять du , а інтегруванням – функцію v . Звичайно, при аналізі підінтегрального виразу за u слід брати таку частину підінтегральної функції, яка при диференціюванні не дуже ускладнюється, а за dv - таку частину підінтегрального виразу, що легко інтегрується. Зауважимо нарешті, що при знаходженні функції v довільну сталу краще не вводити.

Розв'язання прикладів надалі наводиться в конспективному вигляді: після умови вказано вирази u, dv, du, v.

Приклад 7.15.

$$\int \ln x\, dx = \left| \begin{array}{c} u = lnx,\ dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{x},\ v = x \end{array} \right| = x\, lnx - \int dx = x\, lnx - x + C.$$

Приклад 7.16.

$$\int x \cos x\ \ dx = \left| \begin{array}{c} u = x, dv = cosx\, dx \\ du = dx, v = sinx \end{array} \right| = x \sin x - \int sinx\, dx$$
$$= x \sin x + \cos x + C.$$

Приклад 7.17.

$$\int arctg\, x\, dx = \left| \begin{array}{c} u = arctg\, x,\ dv = \ dx \\ du = \dfrac{dx}{1 + x^2},\ v = x \end{array} \right| =$$
$$= x\, arctg\, x - \frac{1}{2} \int \frac{(1 + x^2)'}{1 + x^2} dx = x\, arctg\, x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C\, .$$

Приклад 7.18.

$$I = \int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \left| \begin{array}{c} u = \sqrt{x^2 \pm a^2},\ dv = \ dx \\ du = \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}},\ v = x \end{array} \right| = x\sqrt{x^2 \pm a^2} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} =$$
$$= x\sqrt{x^2 \pm a^2} - \int \frac{(x^2 \pm a^2) \mp a^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx =$$
$$= x\sqrt{x^2 \pm a^2} - I \pm a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}.$$

Звідси $2I = x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$. Беручи до уваги результати прикладу 7.7, дістанемо

$$I=\int\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C.$$

Іноді метод інтегрування частинами доводиться застосовувати кілька разів.

Приклад 7.19.

$$\int x^2e^xdx=\begin{vmatrix}u=x^2,\ dv=\ e^xdx\\du=2xdx,\ v=e^x\end{vmatrix}=x^2e^x-2\int xe^x\,dx=\begin{vmatrix}u=x,\ dv=\ e^xdx\\du=dx,\ v=e^x\end{vmatrix}$$

$$==x^2e^x-2xe^x+2\int e^x\,dx=e^x(x^2-2x+2)+C.$$

Приклад 7.20.

$$I=\int e^{ax}\cos bx\,dx=\begin{vmatrix}u=e^{ax},\ dv=\ \cos bx\,dx\\du=ae^{ax}dx,\ v=\dfrac{\sin bx}{b}\end{vmatrix}=\frac{e^{ax}\sin bx}{b}-$$

$$-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\ dx=\begin{vmatrix}u=e^{ax},\ dv=\ \sin bx\,dx\\du=ae^{ax}dx,\ v=-\dfrac{\cos bx}{b}\end{vmatrix}=\frac{e^{ax}\sin bx}{b}+$$

$$+\frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx-\frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx\,dx=\ \frac{a\cos bx+b\sin bx}{b^2}e^{ax}-\frac{a^2}{b^2}I.$$

Звідси

$$I=\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax}+C.$$

Зауважимо, що загальні методи інтегрування застосовуються не шаблонно. Вони не вказують абсолютно точного шляху обчислення інтеграла. Як бачимо, часто необхідні попередні алгебраїчні перетворення підінтегральної функції. В принципі до кожного інтеграла потрібен окремий підхід, необхідні певні навички в інтегруванні.

Проте є досить широкі класи функцій, для яких використовуються стандартні прийоми їх перетворень і зведення до табличних інтегралів або для подальшого застосування загальних методів інтегрування.

VIII. ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

8.1 ПЛОЩА КРИВОЛІНІЙНОЇ ТРАПЕЦІЇ

Нехай $S = S(f(x), a, b)$ – площа фігури, обмеженої прямими $y = 0$, $x = a$, $x = b$ та графіком невід'ємно і неперервної на проміжку $[a, b]$ функції $y = f(x)$ (рис. 9). Тоді

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

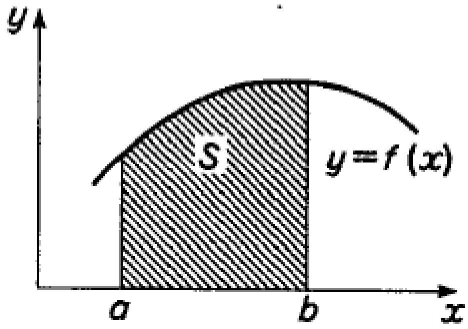


Рисунок 9

Приклад 8.1. *Обчислити площу S півкруга обмеженого відрізком прямої* $y = 0$ *та півколом*

$y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Дістанемо $S = \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$.

Застосуємо в інтегралі заміну змінних $x = R\sin t$, $-\frac{\pi}{2} \le t \le \pi/2$.

Дістанемо

$$S = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 t}\, R\cos t\, dt = R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt =$$

$$= \frac{R^2}{2} \int_{-\pi/2}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\, dt = \frac{R^2}{2}\left(1 + \frac{1}{2} sin\, 2t\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi R^2}{2}.$$

8.2 ОБ'ЄМ ПРЯМОГО ЦИЛІНДРА

Нехай $V_H = V_H\,(f(x), a, b)$ — об'єм прямого циліндра з висотою H, в основі якого лежить фігура S, обмежена відрізками прямих $y = 0$, $x =$ a, $x = = b$ та графіком функції $y = f(x)$ ($f(x)$ — невід'ємна неперервна функція на проміжку [a, b]). Тоді

$$V_H = H\int_a^b f(x)\,dx.$$

Взявши до уваги, що $V_H(\sqrt{R^2-x^2},-R,R\ )$ — об’єм половини прямого кругового циліндра з висотою H і радіусом основи R, матимемо відому формулу об’єму циліндра

$$V_{ц} = \ \pi R^2 H.$$

8.3 ОБ’ЄМ ТІЛА, УТВОРЕНОГО ОБЕРТАННЯМ

Нехай $V\ =\ V(f(x),a,b)$ – об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис криволінійної трапеції, обмеженої відрізками прямих $y=0,\ x=a,\ x=b$ та графіком невід’ємної неперервної на проміжку $[a,b\ ]$ функції $y=f(x)$. Тоді

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Застосуємо цю формулу, щоб дістати відомі формули для об’ємів кулі та конуса:

$$V_{кул} = V\left(\sqrt{R^2-x^2},-R,R\right) = \pi\int_{-R}^{R}\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^2 dx = \ \pi\left(R^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{-R}^{R} =$$

$$= \pi\left(2R^3-\frac{2}{3}R^3\right) = \frac{4}{3}\pi R^3\ ;$$

$$V_{кон} = V\left(R-\frac{R}{H}x,0,H\right) = \pi\int_0^H\left(R-\frac{R}{H}x\right)^2 dx = \pi R^2\left(x-\frac{x^2}{H}-\frac{x^3}{3H^2}\right)\Bigg|_0^H$$

$$= \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

8.4 ПЛОЩА СЕКТОРА

Нехай $S = S\ (\rho(\varphi),\alpha,\beta)$ — площа сектора, обмеженого променями $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$ та кривою $\rho=\rho(\varphi)$, де ρ, φ — полярні координати; $\rho(\varphi)$ — неперервна на проміжку $[\alpha,\beta]$ функція (рис. 10). Тоді

$$S = \frac{1}{2}\int_{a}^{\beta} \rho^2(\varphi)\, d\varphi.$$

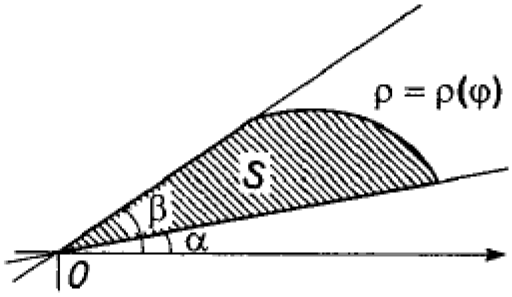


Рисунок 10

Приклад 8.2. *Обчислимо площу пелюстки* $\rho = a\, sin\, 2\varphi$ $(0 \le \varphi \le \pi/2)$.

Маємо:

$$S = S\left(a\, sin\, 2\varphi\, , 0, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/2} a^2\, sin^2\, 2\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{4}\int_{0}^{\pi/2} (1 - cos\, 4\varphi)\, d\varphi = \frac{a^2}{4}\left(\varphi - \frac{sin\, 4\varphi}{4}\right)\Big|_{0}^{\pi/2} = \frac{1}{8}\pi a^2.$$

8.5 ДОВЖИНА ДУГИ ГРАФІКА

Розглянемо величину, яку також можна обчислити за допомогою інтеграла.

Нехай $f(x)$ - визначена на проміжку $[a, b\,]$ функція, $T = \{a = x_0 < x_1 < \,...\, < x_k = b\}$ — подрібнення проміжку $[a, b\,]$; $P_0, P_1, \ldots, P_k$ — відповідні точки на графіку $y = f(x)$. Позначимо через $L(T) = |P_0P_1| + \ldots + |P_{k-1}P_k|$ довжину ламаної з вершинами в цих точках (рис. 11).

Означення 8.1. *Якщо існує* $\lim\limits_{n\to\infty} L(T_n)$ *яка не залежить від вибору нормальної послідовності подрібнень* T_n *,то цю границю називають* ***довжиною дуги графіка*** $y = f(x)$ *на відрізку* $[a, b\,]$.

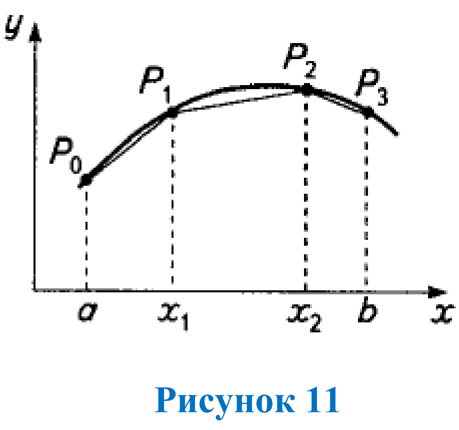


Рисунок 11

Теорема 8.1. Нехай функція $f(x)$ неперервна й має неперервну похідну на проміжку $[a, b\ ]$. Тоді довжина дуги графіка $y\ = f(x)$ на цьому проміжку існує й обчислюється за формулою

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

Д о в е д е н н я

Обчислимо довжину одного відрізка $|P_{i-1}P_i|$, скориставшись теоремою Лагранжа. Оскільки $P_{i-1} = P_{i-1}\big(x_{i-1}, f(x_{i-1})\big)$, $P_i = \ P_i\big(x_i, f(x_i)\big)$, то

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(x_1 - x_{i-1})^2 + \left(f'(c_i)\right)^2 (x_i - x_{i-1})^2} = (x_i - x_{i-1})\sqrt{1 + \left(f'(c_i)\right)^2}.$$

Тоді

$$L(T) = (x_1 - x_0)\sqrt{1 + \left(f'(c_1)\right)^2} + \cdots + \ (x_k - x_{k-1})\sqrt{1 + \left(f'(c_k)\right)^2}.$$

Отже, $L(T) = \sigma(T)$ — інтегральна сума для функції $\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}$. Оскільки остання функція неперервна за умовою, то вона інтегровна й, отже, існує $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(T_n)$, який не залежить ні від вибору нормальної послідовності подрібнень T_n, ні від вибору точок $c_1,\ c_2,\ \dots\ , c_k$. Таким чином, $\lim\limits_{n\to\infty} L(T_n)$ існує, що й потрібно довести.

Зауваження. Якщо крива задана параметрично формулами $x = x(t)$, $y = y(t)$, де функції $x(t)$ і $y\ (t)$ неперервні й мають неперервні похідні на проміжку $[\alpha, \beta]$, то для довжини дуги кривої при $t \in [\alpha, \beta]$ справедлива формула

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt,$$

яка доводиться аналогічно розглянутій вище.

Рекомендована література

а) основна література:

1. Вища математика: Підручник: У 2 кн: Кн. 1. Основні розділи. За ред. Кулініча Г.Л. К.: Либідь, 2003.
2. Вища математика: Підручник: У 2 кн: Кн. 2. Спеціальні розділи. За ред. Кулініча Г.Л. К.: Либідь, 2003.
3. Шипачев В.С. Высшая математика.-М.: Высшая школа, 1990.
4. Таран Є.Ю. Вища математика для студентів ННІ «Інститут геології». Електронний конспект лекцій, 2005.
5. Гудименко Ф.С., Борисенко Д.М., Волкова В.С., Зражевська Г.М., Ющенко О.А. Збірник задач з вищої математики. – К.: Видавництво Київського університету, 1967.
6. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. М.:Наука, 1978.

б) додаткова література:

7. Вища математика. Ч.І. Основний розділ. Під редакцією Г.Л.Кулініча, Либідь, К., 1995.
8. Вища математика: теорія, практика, задачі. Під редакцією Г.Л.Кулініча, Либідь, К., 1992.
9. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике, 1967.